

等加速度直線運動の公式

時刻 $t = 0$ において位置 $x = 0$ にあり初速度 $v = v_0$ をもつ物体が加速度 a で運動するとき、時刻 t における物体の位置 x と速度 v について以下の式が成り立つ。

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

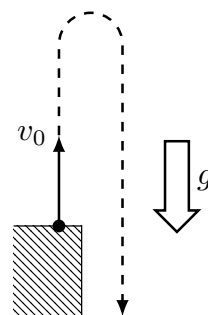
$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad (3)$$

ここで、位置 x 、速度 (初速度) v (v_0)、加速度 a はベクトル量、すなわち向きをもつことに注意する。1次元では、それらの量が最初に決めた“基準の向き”と同じ向きなら正の値、逆向きなら負の値として向きを扱う。すなわち、向きが値の符号として表されることになる。それらを用いた計算結果として出てくる値も、同様に基準の向きに対する向きを符号として含んだものとなる。この扱いに慣れてしまえば、複数種類ある落下運動の公式を覚える必要はなく、最初の等加速度直線運動の公式だけですべての落下運動を扱うことができる。

— 例題 1 —

ある時刻に、十分高い場所から小球を鉛直上向きに初速度 $v_0 = 10 \text{ m/s}$ で投げ上げた。重力加速度の大きさを $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、空気抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

- (i) 投げ上げてから 1.0 s 後の小球の速度と位置を求めよ。
- (ii) 投げ上げてから 3.0 s 後の小球の速度と位置を求めよ。



以下では、基準の向きのとり方が自由であることを示すために、鉛直上向き、および鉛直下向きのそれぞれを基準の向きとした場合について考える。

▶ 上向きを基準にとった場合

鉛直上向きを“基準の向き”(=正の向き) とすると、

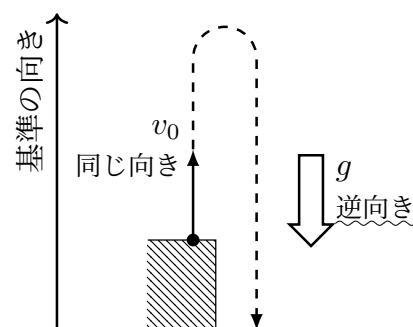
初速度: 基準と同じ向き → 正の値

重力加速度: 基準と逆向き → 負の値

として計算することになる。すなわち、

$$v_0 = +10 \text{ m/s}, \quad a = -9.8 \text{ m/s}^2$$

を用いる。



- (i) 投げ上げてから 1.0 s 後の小球の速度は、公式 (1) を用いて、

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at = (+10) + (-9.8) \times 1.0 \\ &= +0.20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

結果が正で得られたということは、これが“基準の向き”と同じ向き、すなわち鉛直上向きであることを意味する。したがって、求める速度は鉛直上向きに 0.20 m/s である。

位置については、公式 (2) を用いて、

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (\underset{\sim}{+}10) \times 1.0 + \frac{1}{2} \times (\underset{\sim}{-}9.8) \times (1.0)^2 \\ &= \underset{\sim}{+}5.1 \text{ m} \end{aligned}$$

同様に、結果が正で得られたことは、小球の位置が最初の位置から“基準の向き”と同じ方向、すなわち鉛直上向き方向にあることを意味する。したがって、求める位置は最初の位置から鉛直上向きに 5.1 m である。

(ii) 投げ上げてから 3.0 s 後の小球の速度は、公式 (1) を用いて、

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a t = (\underset{\sim}{+}10) + (\underset{\sim}{-}9.8) \times 3.0 \\ &= \underset{\sim}{-}19.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

結果が負で得られたということは、これが“基準の向き”と逆向き、すなわち鉛直下向きであることを意味する。したがって、求める速度は鉛直下向きに 19.4 m/s である。

位置については、公式 (2) を用いて、

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (\underset{\sim}{+}10) \times 3.0 + \frac{1}{2} \times (\underset{\sim}{-}9.8) \times (3.0)^2 \\ &= \underset{\sim}{-}14.1 \text{ m} \end{aligned}$$

同様に、結果が負で得られたことは、小球の位置が最初の位置から鉛直下向き方向にあることを意味する。したがって、求める位置は最初の位置から鉛直下向きに 14.1 m である。

▶ 下向きを基準にとった場合

鉛直下向きを“基準の向き”(=正の向き)とすると、先ほどと逆の対応になり、

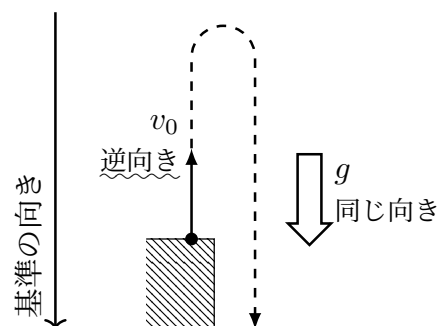
初速度: 基準と逆向き → 負の値

重力加速度: 基準と同じ向き → 正の値

として計算することになる。すなわち、

$$v_0 = \underset{\sim}{-}10 \text{ m/s}, \quad a = \underset{\sim}{+}9.8 \text{ m/s}^2$$

を用いる。



(i) 投げ上げてから 1.0 s 後の小球の速度は、公式 (1) を用いて、

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a t = (\underset{\sim}{-}10) + (\underset{\sim}{+}9.8) \times 1.0 \\ &= \underset{\sim}{-}0.20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

結果が負で得られていて、先ほどの上向きを基準にとった場合と異なるように見える。しかし、このマイナスはあくまで今の基準の向きに対して逆向きであることを表しているだけであり、今

は鉛直下向きを基準にしているので、この計算結果を言葉で表し直せば鉛直上向きに 0.20 m/s となり、やはり先ほどと同じ結果であることが分かる。

位置については、公式 (2) を用いて、

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (\sim 10) \times 1.0 + \frac{1}{2} \times (\pm 9.8) \times (1.0)^2 \\ &= \sim 5.1 \text{ m} \end{aligned}$$

同様に、これが今の“基準の向き”である鉛直下向きと逆方向であることを考えれば、求める位置は最初の位置から鉛直上向きに 5.1 m となり、上向きを基準にとった場合と一致している。

(ii) 投げ上げてから 3.0 s 後の小球の速度は、公式 (1) を用いて、

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a t = (\sim 10) + (\pm 9.8) \times 3.0 \\ &= \pm 19.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

正で得られたので、求める速度は基準の向きと同じ向き、すなわち鉛直下向きに 19.4 m/s である。位置については、公式 (2) を用いて、

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (\sim 10) \times 3.0 + \frac{1}{2} \times (\pm 9.8) \times (3.0)^2 \\ &= \pm 14.1 \text{ m} \end{aligned}$$

同様に、結果が正で得られたことから、求める位置は基準の向きと同じ方向、すなわち最初の位置から鉛直下向きに 14.1 m である。