1. はじめに

「直線の方程式」と聞いて，最初に思いつく式はどのような形をしているでしょうか． 中学校ではじめに教わるのは $y=ax+b$ という形ですが， 例えば $kx+ly+m=0$ というような形をした式も，直線の方程式です($l\neq 0$ のときに簡単な計算をすれば，慣れ親しんだ形に変形できます)． どちらの表し方にも，それぞれに扱う上での利点があります． 前者は，式から直ちに傾きと切片を読み取ることができ，その式が表す直線がどのようなものであるのかをよく表しているといえるでしょう． このように，対象の性質を分かりやすく示す形を「標準形」といい，直線の場合， $y=ax+b$ の形を特に「傾き・切片標準形」といいます． 一方で後者は，どのような直線でも表すことができます(傾き・切片標準形では y 軸に平行な直線は表せないことに注意しましょう)． このように，対象を普遍的に表せる形を「一般形」といいます． これら 2 つの例からも分かるように，方程式による直線の表し方は一通りに決まっているわけではありません． 特に標準形については，前述の傾き・切片標準形以外にもいろいろな形があり，それらをうまく使い分けることで，計算量を節約できたり，問題に対する見通しがよくなったりすることがあります． 以降では，直線のどの性質が既知であるかに応じた標準形を用いることで，手早く直線の方程式を求める方法を紹介します．

2. 傾きと切片が与えられている場合

傾き a ， y 切片 b (以下，単に「切片」と書く)の直線の方程式は，次式で与えられる．

$$y=ax+b$$

例題 傾き 4 ，切片 7 の直線の方程式を求めよ．

解答 上式に傾きと切片を代入すると， $y=4x+7$ ．

直線の方程式の**傾き・切片標準形** (slope-intercept form)です． 直線が x 座標の異なる 2 点 (x_1,y_1) ，(x_2,y_2) を通るとき，これらの 2 点を代入した式

$$y_1=ax_1+b,\quad y_2=ax_2+b$$

の辺々を引くことで，

$$y_1-y_2=a(x_1-x_2)\quad \text{すなわち}\quad a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

を得ます． これは直線の傾きの定義そのものなので，確かに a が直線の傾きとなっていることを確かめることができます．

次に，この直線と y 軸との交点を求めることを考えます． y 軸を，方程式 $x=0$ で表される直線と考えると， x と y の連立方程式

$$y=ax+b,\quad x=0$$

を解いて，直ちに交点 $(0,b)$ を得ることができます．切片とは，直線と y 軸との交点の y 座標の値でしたから，確かに b が直線の切片となっていることを確かめることができます．

3. 傾きと通る 1 点が与えられている場合

傾き a， (x_1, y_1) を通る直線の方程式は，以下で与えられる．

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

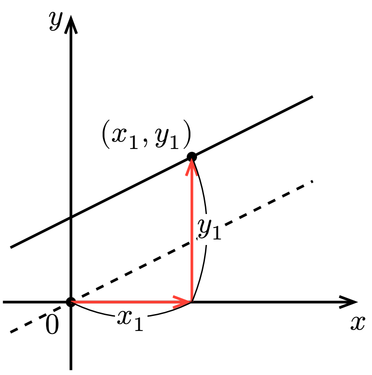
あるいは，これを変形して，

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

と書くこともできる．

例題 $(2, 5)$ を通り，傾きが 3 の直線の方程式を求めよ．

解答 上式に通る点と傾きを代入すると， $y = 3(x - 2) + 5 = 3x - 1$.



「 (x_1, y_1) を通る，傾きが a の直線」は，左図のように，「原点を通る，傾きが a の直線」を， x 軸方向に x_1， y 軸方向に y_1 だけ平行移動させたものだと考えることができます． 平行移動後の座標を (X, Y) と書くと，平行移動前の座標 (x, y) との関係は，

$$X = x + x_1, \quad Y = y + y_1$$

で与えられます．これを， $x = X - x_1$, $y = Y - y_1$ と変形し，平行移動前の直線の式 $y = ax$ に代入すると，

$$Y - y_1 = a(X - x_1)$$

を得ます．これにより，平行移動後の X 座標と Y 座標との関係が分かったので， 直線の式らしく， X を x， Y を y と書き直してやると，

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

として，欲しかった直線の式が求まります．もちろん，左辺の $-y_1$ を移項して，

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

とすることもできます(実際に計算するときにはこちらの方が手早く済むことが多いでしょう)．

あるいは，次のように考えることもできます．まず，求める直線は傾きが a なので， 原点を通り傾きが a である直線の方程式

$$y = ax$$

から出発して，点 (x_1, y_1) を通るように，すなわち $x = x_1$, $y = y_1$ を 代入したときに等号($=$)が成り立つように手を加えていきます． いまのままでは， $x = x_1$, $y = y_1$ を代入したとき，

$$y_1 = ax_1$$

となり，この等式が成り立っている保証はありません．そこで，天下り的ではありますが， $x = x_1$ を代入したときに x に関わる項が消えるように， $x \to x - x_1$ としてみます． すると，方程式は

$$y = a(x - x_1)$$

と変わるので， $x = x_1$, $y = y_1$ を代入すると，

$$y_1 = a(x_1 - x_1) = 0$$

となります．必ずしも $y_1=0$ であるとは限らないので，これを正しい等式にするためには，右辺にあと y_1 だけ加わっていればよさそうです．そこで，方程式の右辺にさらに y_1 を加えて，

$$y=a(x-x_1)+y_1$$

を得ます．

4. 通る 2 点が与えられている場合

x 座標の異なる 2 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) を通る直線の方程式は，以下で与えられる．

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad \text{もしくは} \quad y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$$

あるいは，これを変形して，

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1 \quad \text{もしくは} \quad y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)+y_2$$

と書くこともできる．

例題 2 点 $(1,4),(3,-2)$ を通る直線の方程式を求めよ．

解答 上式に通る 2 点の座標を代入すると，$y=\frac{4-(-2)}{1-3}(x-1)+4=-3x+7$．

x 座標の異なる 2 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) を通る直線の傾き a は，定義から，

$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left(=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$$

で与えられるので，これを 2 節の式中の a として用いることで，

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \tag{4.1}$$

を得ます．式 (4.1) では，通る点として (x_1,y_1) を用いましたが，直線は (x_2,y_2) も通るので，こちらを用いて，

$$y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$$

とすることもできます．前節と同様に，左辺の y_1,y_2 を移項して，

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1, \quad y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)+y_2$$

と書くほうが分かりやすくなることもあります．

練習問題

座標平面上で次の 2 点を通る直線の方程式を，それぞれ求めよ．

(a) $(2, 5), (-4, 9)$

(b) $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}\right), \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

(c) $(-4, 5), (-4, -13)$

(a) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{19}{3}$

(b) $y = -\dfrac{5}{2}x + 4$

(c) $x = -4$