

問題

以下の空欄に適切な言葉、数式、文章などを入れ、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを示しましょう。

- 1) $\sqrt{2}$ がもし (i) だとすると、分数 $\frac{p}{q}$ (p, q は自然数) で表せます。さらに、 $\frac{p}{q}$ は約分しきられた形（つまり p と q の最大公約数が 1）にしてあるとします。
- 2) このとき、 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ の両辺を (ii) 乗すると、

$$2 = \frac{\boxed{(iii)}}{\boxed{(iv)}}$$

となります。

- 3) 整理すると、

$$p^2 = \boxed{(v) (q \text{ の式})}$$

となります。つまり、 p^2 は 2 の倍数になっています。

- 4) p^2 が 2 の倍数なので、 p も 2 の倍数でなければなりません。なぜなら、(vi) (文章)。そこで、 $p = 2r$ (r は整数) とおきます。
- 5) すると、

$$p^2 = \boxed{(vii) (r \text{ の式})}$$

なので、

$$q^2 = \boxed{(viii) (r \text{ の式})}$$

が成り立ちます。このことから、 q^2 も 2 の倍数であり、したがって (vi) と同じ理由で q も 2 の倍数となります。

- 6) つまり、 p も q も (ix) で割り切れることになり、(x)(文章) という仮定に矛盾します。
- 7) よって、 $\sqrt{2}$ を分数で表すことは (xi)、 $\sqrt{2}$ は無理数だとわかります。

おまけ

- [1] 無理数 x と有理数 q に対して、 qx が無理数であることを示せ。
- [2] 無理数 x と有理数 q に対して、 $q + x$ が無理数であることを示せ。
- [3] 「無理数どうしの積は無理数である」は真であるか、偽であるか。真ならば証明し、偽ならば反例を挙げよ。
- [4] 「無理数どうしの和は無理数である」は真であるか、偽であるか。真ならば証明し、偽ならば反例を挙げよ。