

問題

以下の空欄に適切な言葉，数式，文章などを入れ， $\sqrt{2}$ が無理数であることを示しましょう．

1) $\sqrt{2}$ がもし (i) だとすると，分数 $\frac{p}{q}$ (p, q は自然数) で表せます．さらに， $\frac{p}{q}$ は約分しきれた形（つまり p と q の最大公約数が 1）にしてあるとします．

2) このとき， $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ の両辺を (ii) 乗すると，

$$2 = \frac{\text{(iii)}}{\text{(iv)}}$$

となります．

3) 整理すると，

$$p^2 = \text{(v) (q の式)}$$

となります．つまり， p^2 は 2 の倍数になっています．

4) p^2 が 2 の倍数なので， p も 2 の倍数でなければなりません．なぜなら，(vi) (文章)．そこで， $p = 2r$ (r は整数) とおきます．

5) すると，

$$p^2 = \text{(vii) (r の式)}$$

なので，

$$q^2 = \text{(viii) (r の式)}$$

が成り立ちます．このことから， q^2 も 2 の倍数であり，したがって (vi) と同じ理由で q も 2 の倍数となります．

6) つまり， p も q も (ix) で割り切れることになり，(x)(文章) という仮定に矛盾します．

7) よって， $\sqrt{2}$ を分数で表すことは (xi)， $\sqrt{2}$ は無理数だとわかります．

おまけ

- [1] 無理数 x と有理数 q に対して， qx が無理数であることを示せ．
- [2] 無理数 x と有理数 q に対して， $q + x$ が無理数であることを示せ．
- [3] 「無理数どうしの積は無理数である」は真であるか，偽であるか．真ならば証明し，偽ならば反例を挙げよ．
- [4] 「無理数どうしの和は無理数である」は真であるか，偽であるか．真ならば証明し，偽ならば反例を挙げよ．