平面図形 (中 2 まで)

1

方針

線分の長さが同じことを示す問題は,「合同な図形」もしくは「二等辺三角形」を探す．この問題では,合同らしき図形が見当たらないので，$\triangle$BED が B を頂点とする二等辺三角形であることを示す方針で解く．

解答

$\triangle$ACE について, $\angle$ACE $= 90°$ より, $\angle$CEA $= 90° - \angle$CAE．一方, $\triangle$ABD について, $\angle$ABD $= 90°$ より，$\angle$ADB $= 90° - \angle$BAD．$\angle$CAE $= \angle$BAD とあわせて，$\angle$CEA $= \angle$ADB．対頂角は等しく $\angle$CEA $= \angle$BED であるから，$\angle$BED $= \angle$BDE．よって $\triangle$BED は点 B を頂点とする二等辺三角形であり，BE $=$ BD．□

2

解答 1

$\triangle$ABE $\backsim$ $\triangle$DAE を示す．AD $\parallel$ BC より $\angle$AEB $= \angle$DAE．さらに $\angle$BAE $=$ ADE より，対応する 2 角が相等しいため，$\triangle$ABE $\backsim$ $\triangle$DAE．AB $=$ AE より，$\triangle$ABE は二等辺三角形であるから，$\triangle$DAE も二等辺三角形．したがって DA $=$ DE．□

解答 2

$\triangle$DAE に注目すると，$\angle$DEA $= 180° - \angle$ADE $- \angle$DAE．AD $\parallel$ BC より $\angle$DAE $= \angle$AEB．さらに $\angle$ADE $= \angle$BAE を用いると，$\angle$DEA $= 180° - \angle$BAE $- \angle$AEB $= \angle$ABE．$\triangle$ABE が二等辺三角形であることから，$\angle$ABE $= \angle$AEB が従う．以上から，$\angle$DAE $= \angle$ABE $= \angle$AEB．よって $\triangle$DAE も二等辺三角形であり，DA $=$ DE．□

3

方針

$\angle$BAE $= \angle$DAE であることから，$\triangle$ABE を AE で折り返すと AB が AD に重なることに気づく．同様に $\triangle$DCE も DE で折り返してみると，BE と ED はちょうど重なりそうである．これを示す．

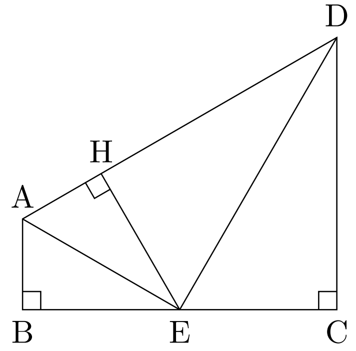
解答

下図のように，点 E から辺 AD に垂線を引き，その足を H とする．

まず，$\triangle$ABE $\equiv$ $\triangle$AHE を示す．両者とも直角三角形であり，辺 AE を共有している．$\angle$BAE $= \angle$HAE であることから，斜辺とひとつの鋭角が相等しく，$\triangle$ABE $\equiv$ $\triangle$AHE.

次に, $\triangle$DCE $\equiv$ $\triangle$DHE を示す．両者とも直角三角形であり, 辺 DE を共有している．仮定の AB+DC $=$ AD と，先に示した合同から得られる AB $=$ AH を用いると，DC $=$ AD $-$ AB $=$ AD $-$ AH $=$ DH．し

たがって，斜辺と他の一辺が相等しいので，$\triangle \mathrm{DCE} \equiv \triangle \mathrm{DHE}$.
以上をあわせると，$\mathrm{BE} = \mathrm{EH} = \mathrm{EC}$. □



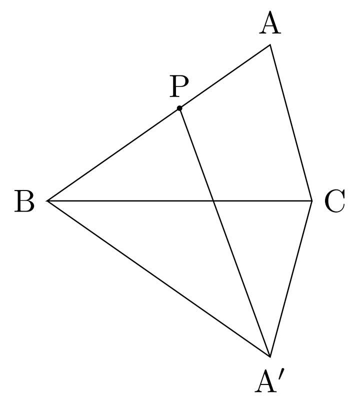
4

方針

直線上の点を経由する最短距離の問題は，対称移動が定石.

解答

A を直線 BC に対して対称移動した点を A' とすると，$\mathrm{AQ} + \mathrm{QP}$ の最小値は PA' の長さに等しい. $\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{BA'P}$ を示す．仮定から $\mathrm{AC} = \mathrm{BP}$．また，$\mathrm{A}'$ のとり方により $\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'BC}$ であるから，$\mathrm{AB} = \mathrm{BA}'$．さらに $\angle \mathrm{PBA}' = \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{A'BC} = 2\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{BAC}$．以上から，2 つの角とその間の辺が相等しいので，$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{BA'P}$．よって，$\mathrm{PA}' = \mathrm{BC}$ となり，$\mathrm{AQ} + \mathrm{QP}$ の最小値は，BC の長さに等しい．□



5

方針

まずは四角形 EACF が平行四辺形であることを示す (改題前はこれを示す問題だった)．平行四辺形であるための条件は色々とあるが，$\mathrm{AC} \parallel \mathrm{EF}$ は分かっているので，$\mathrm{AC} = \mathrm{EF}$ を示しにいく.

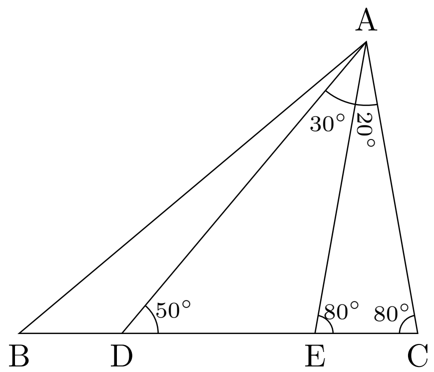
解答

$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$DAE より，AB $=$ AD．したがって $\triangle$ABC は二等辺三角形である．そこで，$\angle$BAD $=$ $\angle$ADE $= \alpha$，$\angle$ABD $=$ $\angle$ADB $= \beta$ と書くと，$\alpha + 2\beta = 180°$ が成り立つ．ゆえに $\angle$EDF $= 180° - \angle$ADE $- \angle$ADB $= 180° - \alpha - \beta = \beta$．一方，AC $\parallel$ EF より，$\angle$EFD $= \angle$ADB $= \beta$ であるから，$\triangle$EDF は ED $=$ EF の二等辺三角形である．$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$DAE とあわせると，AC $=$ DE $=$ EF．仮定から AC $\parallel$ EF であるから，四角形 EACF は平行四辺形．よって，AE $\parallel$ CF.

6

解答

与えられた条件から計算すると，$\angle$CAD $= \angle$CDA $= 50°$ であることが分かる．したがって，$\triangle$CAD は CA $=$ CD の二等辺三角形．同様に $\angle$ACE $= \angle$CEA $= 80°$ であるから，$\triangle$ACE は AC $=$ AE の二等辺三角形．さらに，BD $=$ CE より，CD $=$ CE $+$ ED $=$ BD $+$ DE $=$ BE．以上をあわせると，BE $=$ CD $=$ CA $=$ AE となり，$\triangle$EAB は EA $=$ EB の二等辺三角形である．したがって，$\angle$EAB $= \angle$EBA かつ $\angle$EAB $+ \angle$EBA $= \angle$AEC $= 80°$ より，$\angle$ABE $= 80°/2 = 40°$.



7

解答

1) 仮定より AC $=$ TC, CS $=$ CB．また, $\angle$BCS $= \angle$TCA $= 90°$ より, $\angle$ACS $= \angle$ACB$+\angle$BCS $= \angle$ACB $+ \angle$TCA $= \angle$TCB．以上から，二辺とその間の角が相等しいので，$\triangle$ACS $\equiv$ $\triangle$TCB.
2) AR $\parallel$ CS より，$\triangle$ACS $= \triangle$BCS $= \frac{1}{2}\square$BRCS．同様に，BY $\parallel$ CT より，$\triangle$TCB $= \triangle$TCX $= \frac{1}{2}\square$XCTY．1) より $\triangle$ACS $= \triangle$TCB であるから，$\square$BRCS $= \square$XCTY.
3) 1)，2) と同様の手順で，$\square$PQBA $= \square$AXYU が示せる．したがって，$\square$PQBA $+ \square$BRCS $= \square$AXYU $+ \square$XCTY $= \square$ACTU.

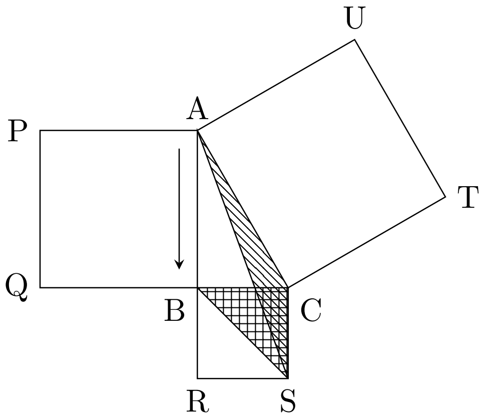
補足

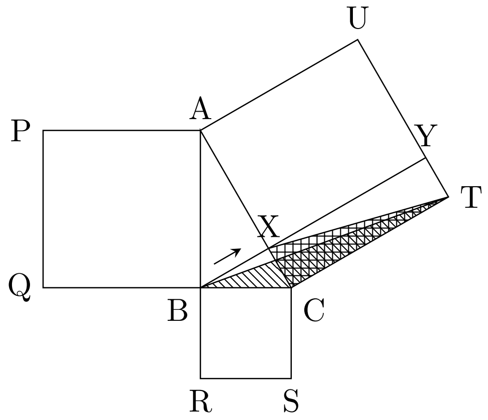
2) では，要するに，以下のそれぞれの図中の斜線で示した部分と格子で示した部分の面積が等しいことを示している．

この問題の考察から，辺 AC が斜辺である直角三角形の各辺の長さについて，一般に

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$$

という関係式が成り立つことが分かる (三平方の定理; Pythagorean theorem)．すなわち，直角三角形の各辺の長さのうち，独立なものは 2 つだけである．





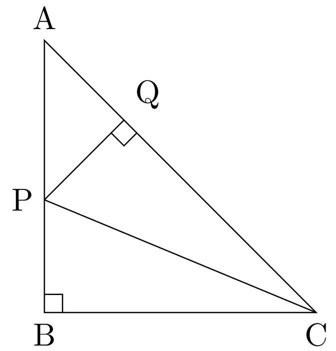
$\boxed{8}$

方針

単純な図形で角の二等分線を見たら，とりあえず折り返してみる．

解答

点 P から辺 AC に下ろした垂線の足を Q とする．直角三角形である △PBC と △PQC は辺 PC を共有していて, 仮定から ∠PCB = ∠PCQ であるから, 斜辺とひとつの鋭角が相等しく, △PBC ≡ △PQC. また，仮定から ∠BAC = 45°，Q のとり方から ∠AQP = 90° であるから，△APQ は直角二等辺三角形で，QA = QP が従う．以上をあわせると，BC + BP = QC + QP = CQ + QA = AC.



$\boxed{9}$

$\boxed{10}$

解答

$\mathrm{AB} = 2, \mathrm{BC} = 1$ から，$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ である．このことと，$\mathrm{DB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = 1 = \mathrm{BC}$ から，$\triangle\mathrm{BCD}$ は正三角形である．すると，$\mathrm{DC} = \mathrm{BC} = \mathrm{EC}$ が従うので，$\triangle\mathrm{CDE}$ は点 C を頂点とする二等辺三角形であり，CM はその頂点と底辺の中点とを結んだ線分であるから，$\mathrm{DE} \perp \mathrm{MC}$.

$\boxed{11}$

方針

$\triangle\mathrm{CED}$ を点 C を中心に 180° 回転すると，点 E の移動先と A，C は一直線に並び，$\triangle\mathrm{ABC}$ と移動先の三角形をあわせると二等辺三角形になる．

解答

辺 AC の C 側の延長上に，点 E' を $\mathrm{E}'\mathrm{C} = \mathrm{EC}$ となるようにとる．このとき，$\triangle\mathrm{E}'\mathrm{BC} \equiv \triangle\mathrm{EDC}$ である．これを示す．点 E' のとり方から，$\mathrm{E}'\mathrm{C} = \mathrm{EC}$．仮定から $\mathrm{BC} = \mathrm{DC}$ であり，対頂角は等しいので $\angle\mathrm{E}'\mathrm{CB} = \angle\mathrm{ECD}$．2 辺とその間の角が相等しいので，$\triangle\mathrm{E}'\mathrm{BC} \equiv \triangle\mathrm{EDC}$ が示せた．このことと仮定から $\mathrm{AB} = \mathrm{ED} = \mathrm{E}'\mathrm{B}$ が従うので，$\triangle\mathrm{BAE}'$ は点 B を頂点とする二等辺三角形である．$\triangle\mathrm{E}'\mathrm{BC} \equiv \triangle\mathrm{EDC}$ であることとあわせて，$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BE}'\mathrm{C} = \angle\mathrm{DEC}$ を得る．

補足

方針に記したことをそのまま示すのでもよい．その場合，点 E を点 C 周りに 180° 回転させた点を E'' として，$\angle\mathrm{ACE}'' = \angle\mathrm{BCE}'' + \angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{DCE} + \angle\mathrm{BCA} = 180^\circ$ をいえばよい．

場合の数・確率

$\boxed{1}$

解答

1) 出目の最大値が k であるのだから，2 回のうちどちらか片方では k が出なければならない．1 回目で k が出る場合，2 回目に許される出目は 1 以上 k 以下の k 通り．2 回目で k が出る場合も同様に k 通り．これらの合計の $2k$ 通りの中には，1 回目と 2 回目の出目がともに k である場合が 2 回含まれてしまっているので，その 1 通りぶんを引くことで，題意を満たす場合の数は $2k-1$ 通り．全事象は $6^2 = 36$ 通りであるから，求める確率は $(2k-1)/36$.

2) k 回の試行それぞれで出る目が k 以下であれば，題意を満たす．1 回の試行で k 以下の目が出る場合は k 通りあるので，n 回全体では k^n 通り．全事象は 6^n 通りであるから，求める確率は $k^n/6^n$.

3) 出目の最大値が k 以下である事象から，出目の最大値が $k-1$ 以下である事象を除くと，出目の最大値が k である事象になる．したがって，2) の結果を用いれば，求める確率は，

$$\frac{k^n}{6^n} - \frac{(k-1)^n}{6^n} = \frac{k^n - (k-1)^n}{6^n}$$

補足

当然だが，3) の結果に $n=2$ を代入すれば，1) の結果が得られる (試してみよ).

$\boxed{2}$

解答

1) 10 個のボールと，2 個の仕切り (ボールどうし，仕切りどうしは区別しない) を左から順に並べていくことを考える．仕切りで区切られた 3 つの区間に入っているボールの個数を左から a, b, c とすれば，題意が満たされる．したがって，これらの並べ方の総数は，(a, b, c) の組の個数と等しい．ボールと仕切りをすべて区別すると，並び順は 12! 通り．10 個のボールだけの並び順は 10! 通り，2 個の仕切りの並び順は 2! 通りあり，これらは区別しないので，求める場合の数は，

$$\frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 66$$

より 66 通り．

2) $\alpha = a-1$，$\beta = b-1$，$\gamma = c-1$ と定めると，自然数 a, b, c に対して α, β, γ は 0 以上の整数となる．さらに，

$$a + b + c = (\alpha+1) + (\beta+1) + (\gamma+1) = 10$$

より，α, β, γ は $\alpha + \beta + \gamma = 7$ を満たす 0 以上の整数である．したがって，1) と同様に，7 個のボールと 2 個の仕切りの並べ方を考えれば，求める場合の数は，

$$\frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$$

より 36 通り．

補足

ボールと仕切りで (a,b,c) を決める，というのは，例えば，

$$\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

のような並びを，$(a,b,c)=(2,5,3)$ に対応させる，ということである．このようにすることで，$a+b+c$ はボールの総数と一致し，異なる (a,b,c) の組には異なる並べ方が対応するので，題意を満たす場合を過不足なく数え上げることができるのである．

$\boxed{3}$

解答

変更すべきである．i) で選んだ箱を「最初の箱」，選ばなかった 2 つの箱をそれぞれ「箱 A」，「箱 B」と書くことにして，起こりうるパターンを整理すると，次の表のようになる．

アタリの箱	最初の箱	最初の箱	箱 A	箱 B
司会者が開ける箱	箱 A	箱 B	箱 B	箱 A
起こる確率	1/6	1/6	1/3	1/3
変更すべきか？	×	×	○	○

箱を変更すべき (最初にハズレを選んでいる) 確率が $1/3+1/3=2/3$ であるのに対し，変更すべきでない (最初にアタリを選んでいる) 確率は $1/3$ であり，iii) で箱を変更したほうが，最終的にアタリを選べる確率が 2 倍であることが分かる．

補足

解答では，最初の箱がアタリであったときに，司会者が箱 A，箱 B のどちらをハズレとして示すかが無作為であるとして表を作ったが，その後の考え方をみれば，司会者がどのように箱を選ぶかは結論に影響しないことが分かる．

$\boxed{4}$

解答

1) 和が 7 で割り切れる目の出方は，$(1,6),(2,5),\cdots,(6,1)$ の 6 通り．全事象は $6^2=36$ 通りあるので，求める確率は $6/36=1/6$.
2) 2 回目までの出目の和が 7 で割り切れるとき，3 回目に出る目が何であっても，3 回目までの和は 7 で割り切れない．一方，2 回目までの出目の和が 7 で割り切れないとき，そのそれぞれの場合に対して，3 回目までの和が 7 で割り切れるような 3 回目の出目がただ 1 通り存在する (例えば，2 回目までの和を 7 で割った余りが 5 であるとき，3 回目の出目を足した数字が 7 で割り切れるためには，3 回目で 2 が出るしかない)．3 回目でそのような目が出る確率は $1/6$ であり，1) の結果を用いれば，2 回目までの和が 7 で割り切れない確率は $1-1/6=5/6$ であるから，求める確率は，$(5/6)\cdot(1/6)=5/36$.

3) 1)，2) と同様に考える．n 回目までの和が 7 で割り切れるとき，$n+1$ 回目でどの目が出ても，$n+1$ 回目までの和は 7 で割り切れない．一方，n 回目までの和が 7 で割り切れないとき，そのそれぞれの場合に対して，3 回目までの和が 7 で割り切れるような 3 回目の出目がただ 1 通り存在する．$n+1$ 回目でそのような目が出る確率は 1/6 であり，n 回までの和が 7 で割り切れない確率は $1-P_n$ と表せるので，

$$P_{n+1}=\frac{1}{6}(1-P_n)$$

が成り立つ．

補足

サイコロの目は 1 から 6 までなので，$P_1=0$ である．すると，3) で求めた関係式を用いれば，すべての n について P_n を順々に計算していくことができ，

$$P_n=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

と表すことができる．

$\boxed{5}$

解答

1) 最大値は 5 点，最小値は 1 点．
2) 出る 2 つの数字が 1 と 3 のときである．袋から 1 が出る確率は 1/7，3 が出る確率は 3/7 であり，赤から 1，白から 3 が出る場合と，赤から 3，白から 1 が出る場合があるので，求める確率は $(1/7)\cdot(3/7)\cdot 2=6/49$.
3) まず，同じ数字が出ることで 1 点となる場合を考える．
出る数字が $(0,0)$ である確率と $(1,1)$ である確率は等しく，$(1/7)\cdot(1/7)=1/49$．出る数字が $(2,2)$ である確率は，$(2/7)\cdot(2/7)=4/49$．出る数字が $(3,3)$ である確率は，$(3/7)\cdot(3/7)=9/49$.
次に，異なる数字が出ることで 1 点となる場合を考える．これは 2 つの数字が 0 と 1 のときであり，その確率は，2) と同様に考えて $(1/7)\cdot(1/7)\cdot 2=2/49$.
以上をあわせて，求める確率は $(1/49)\cdot 2+4/49+9/49+2/49=17/49$.

$\boxed{6}$

解答

1) ℓ の傾き b/a が 2 となる場合を考えればよい．a の値に対して b がただ 1 つに定まるので，a,b の取りうる範囲に注意すれば，a,b の組は $(a,b)=(1,2),(2,4),\cdots,(5,10)$ の 5 通り．カードの取り出し方は $6\cdot 10=60$ 通りあるので，求める確率は $5/60=1/12$.
2) ℓ が $(6,10)$ を通ることから，a,b は $10=\frac{b}{a}\cdot 6+c$，すなわち $\frac{b}{a}=\frac{10-c}{6}$ を満たす．c の値に対して，題意を満たすような a,b の組がいくつ存在するかを調べる．
$c=1$ のとき，$b/a=9/6=3/2$ であるから，$(a,b)=(2,3),(4,6),(6,9)$ の 3 通り．

$c=2$ のとき，$b/a=8/6=4/3$ であるから，$(a,b)=(3,4),(6,8)$ の 2 通り．

$c=3$ のとき，$b/a=7/6$ であるから，$(a,b)=(6,7)$ の 1 通り．

$c=4$ のとき，$b/a=6/6=1$ であるから，$(a,b)=(1,1),(2,2),\cdots,(6,6)$ の 6 通り．

以上を合わせると 12 通りとなり，カードの取り出し方は $6\cdot 10\cdot 4=240$ 通りであるから，求める確率は，$12/240=1/20$.

式と計算

$\boxed{1}$

方針

どう考えても直接計算するのは厳しいので，工夫する．積を構成している分数の中に，$\frac{100}{100}=1$ があることに気づくので，これを手がかりに，対称性を利用する．

解答

積は順番によらないので，並び替えると，

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{100}{100}\times\left(\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}\right)\times\left(\frac{98}{100}\times\frac{102}{100}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{100}\times\frac{199}{100}\right)\times\frac{200}{100}\\
&= 1\times\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\times\frac{(100-2)(100+2)}{100^2}\times\cdots\times\frac{(100-99)(100+99)}{100^2}\times 2
\end{aligned}
$$

と書き直せる．ここで，$1\leq n\leq 99$ を満たす自然数 n について，

$$
\frac{(100-n)(100+n)}{100^2}=\frac{100^2-n^2}{100^2}<\frac{100^2}{100^2}=1
$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
P &= 1\times\underbrace{\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}}_{<1}\times\underbrace{\frac{(100-2)(100+2)}{100^2}}_{<1}\times\cdots\times\underbrace{\frac{(100-99)(100+99)}{100^2}}_{<1}\times 2\\
&< 1\times1\times1\times\cdots\times1\times2=2
\end{aligned}
$$

より，2 のほうが P より大きい．

補足

実際に計算すると，$P\fallingdotseq 7.89\times10^{-26}=0.\underbrace{0\cdots0}_{25\text{ 個}}789$ となり，かなり小さい．$\frac{100-n}{100}$ を掛け算したときの “小さくなり方” は，$\frac{100+n}{100}$ を掛け算したときの “大きくなり方” より強いことが分かる．ちなみに，積をつくる分数の分子を 200 で止めずに増やしていくと，270 個掛けたあたりで，$\frac{1}{100}\times\cdots\times\frac{270}{100}\fallingdotseq 6.66$ 程度の大きさまで戻ってくる．

$\boxed{2}$

$\boxed{3}$

2 次方程式・関数

$\boxed{1}$

方針

2 次方程式の解の個数ときたら判別式を使いたくなるが，パターン的な解法で解けるほど易しい問題ではない．実際，一般形に直すために与式を展開・整理すると，係数に a の 3 乗が出てきてしまい，見通しがよくない．式を睨んでいると，$(x+a)$ が複数箇所に現れていることに気がつくので，これを手がかりに進めていく．

解答

右辺の最後の 3 項を因数分解すると，

$$3(x+a)^2=(2a^2-1)(x+a)+(x+a)(x-3a)$$

とできる．さらに右辺を移項して，全体を $(x+a)$ でくくり出すと，

$$(x+a)\left\{3(x+a)-(2a^2-1)-(x-3a)\right\}=0$$

となるので，整理して，

$$(x+a)(2x-2a^2+6a+1)=0$$

を得る．したがって，方程式の解は

$$x=-a,\quad \frac{2a^2-6a-1}{2}$$

と表せる．いま，この方程式は解をただひとつもつので，2 つの a の表式は等しく，

$$-a=\frac{2a^2-6a-1}{2}$$

である．整理して a についての 2 次方程式 $2a^2-4a-1=0$ を得るので，これを解いて，

$$a=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$$

$\boxed{2}$