2 次方程式これだけは

最終更新: 2024 年 6 月 28 日 18 時 54 分

0　記号の約束

本稿では，式の展開を簡潔にするためなどの理由で，記号 $\iff$ を用います．これは，記号の左右が数学的に等しいことを表すことを示します．以下にいくつか例を挙げます．

✓ 整数 n は偶数 $\iff$ 整数 n は 2 で割り切れる
✓ $x = 2 \iff 2x = 4$
✓ 平面上の 2 直線 L, M が交わらない $\iff$ 2 直線 L, M は平行である

この記号の使い方には，十分な注意が必要です．以下の例は，誤った $\iff$ の使い方です．

× 整数 n は 4 の倍数 $\iff$ 整数 n は偶数
× $x = 2 \iff x^2 = 4$

1 つ目の例について，4 の倍数は偶数ですが，すべての偶数が 4 の倍数であるわけではありません．したがって，2 つの内容は等しくありません．2 つ目の例について，$x = 2$ であれば，明らかに $x^2 = 4$ です．しかし，$x^2 = 4$ だからといって $x = 2$ であるとは限りません ($x = -2$ であるかもしれません)．したがって，やはり 2 つの内容は等しいとはいえません．

1　2 次方程式の解法

まずは 2 次方程式を定義することから始めましょう．

定義 1.I: 2 次方程式

2 次方程式 (quadratic equation) とは，最高次数が 2 である (代数) 方程式のことである．**一般形** (generalized form) は，

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0,\, b,\, c : \text{定数}) \tag{1.1}$$

の形で書き表される．

(1.1) は，未知数 x についての条件を与える方程式です．一般には，定数 a, b, c は複素数[*1]ですが，本稿では主にこれらの定数が実数である場合について扱います．$a \neq 0$ なので，方程式の両辺を a で割ることで，

$$x^2 + px + q = 0 \quad \left(\text{ただし } p = \frac{b}{a},\, q = \frac{c}{a}\right)$$

と変形できます．この操作によって x^2 の係数を 1 にした形のことを**正規形** (normal form) とよびます．任意の 2 次方程式はこのようにして正規形に変形することができます．

さて，2 次方程式の相異なる解の個数について，以下の定理が成り立ちます．

[*1] 実数 (≒ 数直線上にある数) と，2 乗して負になる数 (虚数) を足し合わせてできる数全体のこと．

定理 1.1: 解の個数

2 次方程式は，相異なる解を高々 2 つもつ．

Proof. 任意の 2 次方程式は正規形に変形することができるので，正規形の 2 次方程式について示せば十分です．2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ に相異なる解が 3 つ以上あると仮定し，そのうちの 3 つを α, β, γ とします．このとき，

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \tag{1.2a}$$
$$\beta^2 + p\beta + q = 0, \tag{1.2b}$$
$$\gamma^2 + p\gamma + q = 0 \tag{1.2c}$$

が成り立ちます．(1.2a) の左辺から (1.2b) の左辺を引くと，

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2) + p(\alpha - \beta) &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + p(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta) + p\}\end{aligned}$$

となり，右辺の計算からこれは 0 に等しいことが従います．いま，$\alpha \neq \beta$ ですから，

$$(\alpha + \beta) + p = 0 \iff \alpha + \beta = -p \tag{1.3}$$

を得ます．同様の計算を (1.2a) と (1.2c) に対して行うと，

$$\alpha + \gamma = -p \tag{1.4}$$

を得ます．(1.3) の右側の式と (1.4) を等置することで，

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

となり，ここから $\beta = \gamma$ が従いますが，これは仮定に反します．以上から，2 次方程式は相異なる解を 3 つ以上もたないことが示されました． □

1.1 因数分解による解法

定理 1.2: 因数分解による解法

定数 α, β を用いて，2 次方程式を

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

の形に (同値に) 変形することができたとする．このとき，もとの方程式の解は $x = \alpha, \beta$ である．

Proof. 明らかに，$x = \alpha, \beta$ は方程式を満足します．$\alpha \neq \beta$ のとき，定理 1.1 から，この方程式の解は $x = \alpha, \beta$ で尽くされています．一方 $\alpha = \beta$ のとき，方程式は $(x - \alpha)^2 = 0$ と書けます．$x \neq \alpha$ である x について $(x - \alpha)^2 \neq 0$ なので，方程式を満たす x は $x = \alpha\,(= \beta)$ のみです． □

証明中の $\alpha=\beta$ であるケースのことを，方程式が "**重解** (重根; double root) をもつ" と表現します．重解は，数字としては 1 つぶんですが，2 つの解が "重なっている" とみて，解としては 2 つぶんとしてカウントすることが (よく) あります．

例題 1

2 次方程式 $x^2-3x+2=0$ を解け．

左辺は $(x-1)(x-2)$ と因数分解できるので，与えられた 2 次方程式は $(x-1)(x-2)=0$ と同値．定理 1.2 により，解は $x=1,2$．

また，定理 1.2 は，その逆が真であるということも重要です．すなわち，

定理 1.3: 因数分解による解法の逆

2 次方程式が $x=\alpha,\beta$ を解としてもつとき，もとの方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

と同値である．

Proof. もとの方程式は，正規形 $x^2+px+q=0$ に変形できます．左辺を，

$$\begin{aligned}x^2+px+q&=x^2+px+q\underbrace{-(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)x}_{=0}\underbrace{+\alpha\beta-\alpha\beta}_{=0}\\&=\underbrace{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}_{=(x-\alpha)(x-\beta)}+\underbrace{(p+\alpha+\beta)}_{=s}x+\underbrace{(q-\alpha\beta)}_{=t}\end{aligned}$$

と変形し，$s=p+\alpha+\beta,\ t=q-\alpha\beta$ とおけば，もとの方程式は，

$$(x-\alpha)(x-\beta)+sx+t=0 \tag{1.5}$$

と同値です．したがって，式 (1.5) は $x=\alpha,\beta$ を解にもち，それぞれを左辺に代入すると，

$$\begin{cases}s\alpha+t=0\\ s\beta+t=0\end{cases} \tag{1.6}$$

となり，辺々引けば，$s(\alpha-\beta)=0$ を得ます．

まず $\alpha\neq\beta$，すなわちもとの方程式が重解をもたないとき，$s=0$ です．式 (1.6) より $t=-s\alpha=-s\beta$ ですから，$t=0$ も従います．$s=t=0$ を式 (1.5) に代入すれば，もとの方程式が $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と同値であることが分かります．

次に $\alpha=\beta$，すなわちもとの方程式が重解 $x=\alpha$ をもつとき，もとの方程式と同値な式 (1.5) は，$s=p+2\alpha,\ t=q-\alpha^2$ と改めて，

$$(x-\alpha)^2+sx+t=0 \tag{1.7}$$

と変わります．$x = \alpha + \Delta$ が式 (1.7) を満たすと仮定して左辺に代入すると，

$$\begin{aligned} & (\alpha+\Delta-\alpha)^2 + s(\alpha+\Delta) + t = 0 \\ \iff & \Delta^2 + (p+2\alpha)(\alpha+\Delta) + q - \alpha^2 = 0 \\ \iff & \Delta^2 + p\Delta + 2\alpha\Delta + \underbrace{\alpha^2 + p\alpha + q}_{=0} = 0 \\ \iff & \Delta(\Delta + p + 2\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

を得ます．ただし，途中の変形で $x = \alpha$ がもとの方程式 $x^2 + px + q = 0$ を満たすことを用いました．式 (1.8) を満たす Δ は $\Delta = 0,\ -p - 2\alpha$ ですが，$\Delta \neq 0$ であることはもとの方程式と同値な式 (1.5) が $x = \alpha$ 以外の解をもたないことに反します．したがって，p と a について，

$$-p - 2\alpha = 0 \iff p = -2\alpha$$

の関係があると分かります．いま，もとの方程式は $x^2 - 2\alpha x + q = 0$ と書き直せますから，解 $x = \alpha$ を代入すれば，

$$\alpha^2 - 2\alpha^2 + q = 0 \iff q = \alpha^2$$

となります．p, q の表式から，$s = p + 2\alpha = 0,\ t = q - \alpha^2 = 0$ が従うので，式 (1.5) に戻れば，もとの方程式が $(x-\alpha)^2 = 0$ と同値であることが分かります．以上から，定理 1.3 が示されました． □

例題 2

解が $x = 4, 9$ であるような 2 次方程式をひとつつくれ．

定理 1.3 より，そのような 2 次方程式のひとつは，$(x-4)(x-9) = 0$．あるいは展開して，$x^2 - 13x + 36 = 0$．

1.2　平方完成と解の公式

定義 1.II: 平方完成

2 次式 $ax^2 + bx + c$ を**平方完成** (completing the square) するとは，定数 h, k, ℓ によって，

$$ax^2 + bx + c = h(x+k)^2 + \ell \tag{1.9}$$

という形 (**標準形**; standard form) に変形することである．

(1.9) が成り立つような h, k, ℓ をみつけることができれば，式中で x の出てくる箇所を 1 箇所にまとめることができます．これは，後述する 2 次方程式の解の公式の構成や，放物線のグラフの幾何的な考察など，様々な場面で有用です．では，実際にどのように h, k, ℓ を選べばよいのでしょうか．これを調べるために，(1.9) の右辺を展開してみると，

$$ax^2 + bx + c = hx^2 + 2hkx + hk^2 + \ell$$

となるので，両辺の係数を比較して，

$$a = h, \quad b = 2hk, \quad c = hk^2 + \ell$$

を得ます．これを h, k, ℓ について解いて，

$$h = a, \quad k = \frac{b}{2a}, \quad \ell = c - \frac{b^2}{4a} \tag{1.10}$$

という関係式を得ます．標準形を利用することで，一般形の係数から方程式の解を導く公式を構成することができます．

定理 1.4: 解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.11}$$

Proof. 平方完成を行うための関係式 (1.10) を用いることで，方程式は，

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

と変形できます．この式を変形していくことで，

$$\begin{aligned} & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \\ \iff \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \iff \quad & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \iff \quad & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

を得ます． □

例題 3

2 次方程式 $x^2 + 3x + 1 = 0$ を解け．

解の公式を用いれば，$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

解の公式により，方程式を定理 1.2 の形に変形することなく解を導けますが，計算が煩雑であるという欠点もあります．x の係数 b を，別の定数 b' の 2 倍，すなわち $b = 2b'$ とみることにより，少しだけ表式が簡潔になります．

定理 1.5: 解の公式の変形

2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \tag{1.12}$$

と書ける.

Proof. 解の公式 (1.11) に, $b = 2b'$ を代入すれば直ちに従います.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

より示されました. □

上の公式は任意の 2 次方程式に対して成り立ちますが, 実用上は x の 1 次の係数が偶数である場合に特に有用です. 実際に, 1 次の項の係数が偶数である 2 次方程式を, 2 種類の解の公式を使ってそれぞれ解いてみましょう.

例題 4

2 次方程式 $x^2 + 4x - 3 = 0$ を解け.

解法 1 解の公式 (1.11) により, $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$.

解法 2 与えられた 2 次方程式を $x^2 + 2 \cdot 2x - 3 = 0$ とみることで, 解の公式の変形 (1.12) により, $x = -2 \pm \sqrt{7}$.

このように, 1 次の項の係数が偶数である場合, 解の公式 (1.11) をそのまま用いると, 根号の簡約化と約分をする必要があります. 解の公式の変形 (1.12) の導出は, これらの操作をあらかじめ済ませておいていることに対応するので, 少ない式変形で解を導くことができます.

2 方程式と解の関係

前節では, 方程式からその解を導く方法を調べましたが, この節では, 逆に解から方程式について知ることができないか, あるいは実際に方程式を解かずに解の性質をある程度知ることができないか, について調べます.

2.1　解と係数の関係

定理 2.1: 解と係数の関係

2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が $x = \alpha, \beta$ を解にもつとき，以下の関係式が成り立つ．

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta$$

Proof. 定理 1.3 によれば,

$$x^2 + px + q = 0 \iff (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

です．右側の式を展開すると,

$$x^2 + px + q = 0 \iff x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

となりますが，どちらの方程式も x^2 の係数が 1 であることから，両者の左辺は式として等しく,

$$x^2 + px + q = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

が成り立ちます．係数を比較することで，目的の関係式を得ます． □

例題 5

$x^2 + px + q = 0$ の解が $x = 2, 3$ であるとき，p, q の値を求めよ．

定理 2.1 により，$p = -(2 + 3) = -5$, $q = 2 \cdot 3 = 6$.

例題 6

$x^2 + px + 12 = 0$ が $x = 3$ を解にもつとき，他の解を求めよ．

定理 2.1 を用いれば，他の解は $x = 12/3 = 4$.

2.2　判別式

すでに述べた解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

によって得られる解が実数であるためには，根号の中身が非負である必要があります．また，根号の中身が 0 になるときには，複合 (±) が消え，解はひとつに定まります．これらのことをまとめると，2 次方程式の解の個数について，次のことがいえます．

定理 2.2: 判別式と実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，$D=b^2-4ac$ と定めると，2 次方程式の相異なる実数解の個数について，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} D>0 &\iff \text{相異なる実数解を 2 つもつ} \\ D=0 &\iff \text{実数解を 1 つだけもつ (重解)} \\ D<0 &\iff \text{実数解をもたない} \end{aligned}$$

Proof. 解の公式の形から直ちに従います． □

定理中の $D=b^2-4ac$，すなわち解の公式の根号の中身を，**判別式** (discriminant) とよびます．これを用いると，実際に解を書き下すことなく，解の個数についての情報を得ることができます．

例題 7

2 次方程式 $x^2+6x+k=0$ が実数解をもつように実数 k の値の範囲を定めよ．

判別式 $D=36-4k$ が，$D\geq 0$ を満たすように k を定める．これを解いて，$k\leq 9$．

3　方程式とグラフ

3.1　2 次式の "形"

前節までは，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (あるいは $x^2+px+q=0$) について考えてきましたが，これらの方程式の左辺を x の関数だとみて，それが座標平面上でどのような図形を表すのかについて考察しましょう．すなわち，$y=ax^2+bx+c$ が座標平面になすグラフについて考える，ということです．この形の関数のことを **2 次関数** (quadratic function) といいます．

例として，$a=1, b=c=0$ の場合について考えてみましょう．関数 $y=x^2$ について，いくつかの x の値に対する y の値の対応を書くと，次のようになります．

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

これらを xy 平面上にプロットしたものを，図 1 に示しました．さらに，点と点を "滑らかに" 繋いでいくと，図 2 のようになるでしょう．これは**放物線** (parabola) とよばれる図形を表します．放物線とは，以下で定義される図形です．

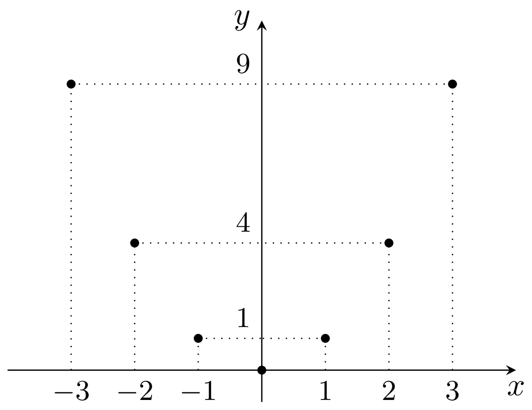


図 1　$y = x^2$ を満たす点

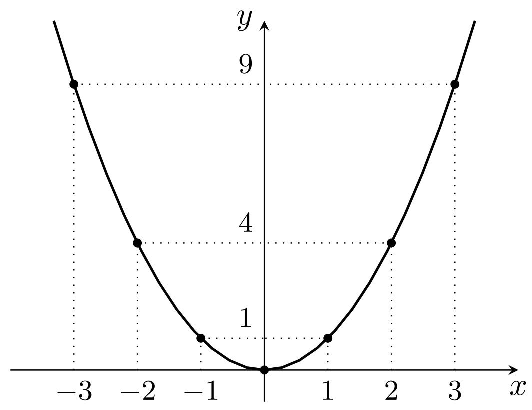
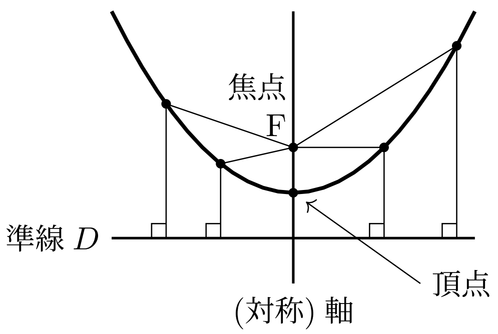


図 2　$y = x^2$ のグラフ

定義 3.I: 放物線

放物線とは，平面上の直線 D と，その上にない点 F からの距離が等しい点の描く図形である．



定義 3.I 中の直線 D を**準線** (directrix)，点 F を**焦点** (focus) とよびます．また，放物線の対称軸 (焦点から準線に下ろした垂線) と放物線との交点のことを**頂点** (vertex) とよび，$y = x^2$ の描く放物線では，頂点は原点 $(0, 0)$ にあります．上でみた $y = x^2$ 上の点が放物線の定義 3.I を満たすことは，簡単に示すことができます (演習問題).

次に，a の値をいろいろと変えてみることを考えましょう．いくつかの a の値について $y = ax^2$ のグラフを描いたものが図 3 です.

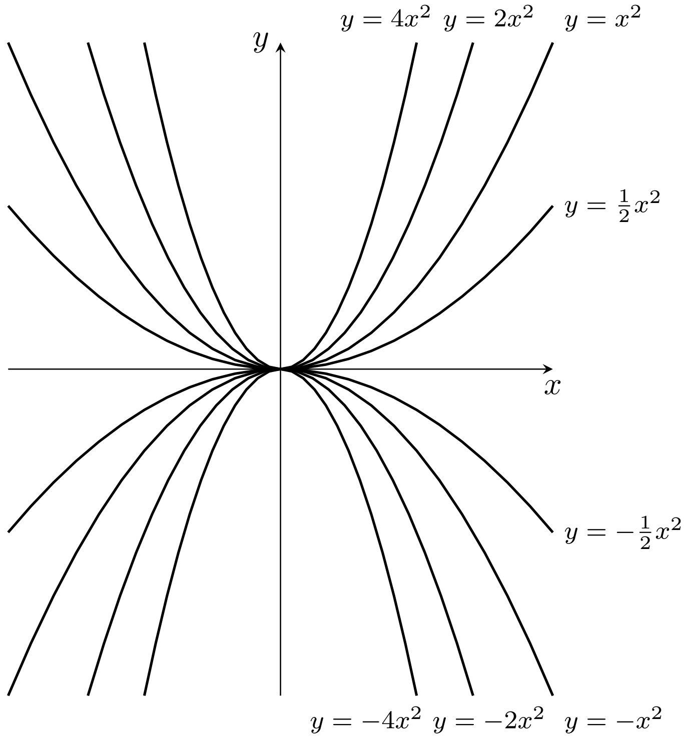


図 3　a の値を変化させたときの $y = ax^2$ のグラフ

図 3 をみると，a の絶対値が大きくなればなるほど，放物線の “開きかた” が小さくなっていくことが分かります．また，$a > 0$ のときはグラフが $y \geq 0$ の範囲のみに存在する一方で，$a < 0$ のときは $y \leq 0$ のみに存在します．前者の形を**下に凸** (convex downward)，後者の形を**上に凸** (convex upward) と表現します．後でみるように，$y = ax^2 + bx + c$ 中の 1 次以下の項 $(bx + c)$ はグラフの平行移動に関係するので，2 次関数が描く放物線の形はその 2 次の項，すなわち a の値によって特徴づけられているといえます．

ここまでは，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の中でも，特に $b = c = 0$ の場合についてみましたが，ここからはより一般の場合について考えます．やや天下り的ですが，2 次関数が描くグラフの形を考えるときには標準形 $y = h(x + k)^2 + \ell$ を用いると見通しがよくなります (任意の 2 次関数は，関係式 (1.9) などによって標準形に変形できます)．標準形の表式を少し変形して，

$$y - \ell = h(x + k)^2$$

とした上で，$X = x + k, Y = y - \ell$ と置くと，

$$Y = hX^2$$

となり，先まででみた $y = ax^2$ と比べると，$x \to X, y \to Y, a \to h$ と対応することが分かります．したがって，この関数は XY 平面上で原点を頂点とする放物線を描きます．あとは，xy 平面と XY 平面との関係について調べれば，もとの関数が xy 平面上に描く図形が明らかになるでしょう．まず，x, y と X, Y には，それぞれに定数ぶんの差しかないことから，XY 平面は xy 平面を平行移動したものであることが分かります．したがって，$Y = hX^2$ は，xy 平面上でもやはり放物線を描くことになります．では，xy 平面上でこの放物線はどこに位置するのでしょうか．これを知るためには，XY 平面が xy 平面をどのように平行移動したものなのかを調べる必要があります．x, y と X, Y は，

$$X = x + k, \quad Y = y - \ell$$

という関係式によって結ばれているのでしたから，XY 平面の原点，すなわち $(X,Y)=(0,0)$ は，xy 平面では $(x,y)=(-k,\ell)$ に対応します．このことから，XY 平面の原点を頂点とする放物線 $Y=hX^2$ は，xy 平面上では $(x,y)=(-k,\ell)$ を頂点とする放物線であり，$y=hx^2$ を x 軸方向に $-k$，y 軸方向に ℓ だけ平行移動したものであることが分かります (図 4).

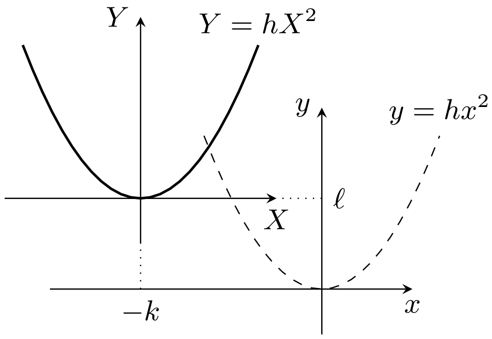


図 4　XY 平面と xy 平面との位置関係

$Y=hX^2$ は，x,y で書き直せば $y=h(x+k)^2+\ell$ のことでしたから，これで一般の 2 次関数が座標平面上に描く図形が明らかになりました.

例題 8

2 次関数 $y=x^2+2x+3$ が座標平面上に描く図形を図示せよ.

$y=x^2+2x+3 \iff y=(x+1)^2+2$ と変形できるので，頂点が $(-1,2)$ で下に凸の放物線を描けばよい.

3.2　放物線と直線との交点

「2 次方程式を解く」ということが，図形的には何を意味するのかについて考察しましょう．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，未知数 x,y についての以下の連立方程式

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$$

と同値であるとみることができます．さて，第 1 式は xy 平面上で放物線を表します．一方，第 2 式は x 軸を表すので，結局，上の連立方程式は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点[*2]を求めることに対応しています．つまり，もとの 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，これらの図形の共有点の x 座標を求める方程式だと解釈できます.

[*2] 交点と接点 (後述) をあわせて「共有点」とよびます.

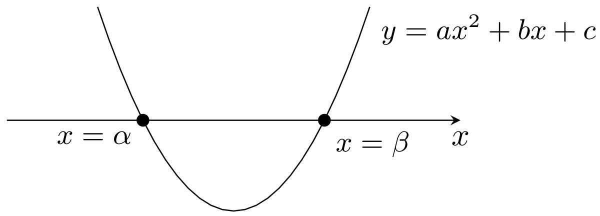


図 5　2 次方程式の解は，放物線と x 軸との交点の x 座標とみなせる

では，次に放物線と一般の直線との共有点について考えてみましょう．直線の方程式は，$y = mx + n$ と表すことができますから，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ との共有点を求める連立方程式は，

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$

となります．2 つの式から y を消去すると，

$$ax^2 + bx + c = mx + n \tag{3.1}$$

を得，整理すると，

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

をとなり，やはり 2 次方程式に帰着されます．

例題 9

放物線 $y = x^2 + 4x + 5$ と直線 $y = -x - 1$ との共有点をすべて求めよ．

2 式を連立して y を消去し，$x^2 + 4x + 5 = -x - 1$．整理して $x^2 + 5x + 6 = 0$ を得るので，これを解いて，$x = -2, -3$．それぞれを直線の方程式に代入して，$y = 1, 2$ となるので，共有点の座標は $(-2, 1)$ および $(-3, 2)$．

さて，以上の議論で，xy 平面上で放物線と直線との共有点を求めることが，2 次方程式を解くことに帰着されるということが分かりました．そこで，前節でみた 2 次方程式と解との関係性にも，図形的な意味を考えてみます．

放物線と直線のいずれも，グラフ上の点の y 座標は，x 座標を与えればただひとつに定まります．[*3] したがって，共有点の x 座標を求める方程式 (3.1) の解の個数は，放物線と直線との共有点の個数と一対一に対応します．定理 2.2 を適用すると，以下が従います．

[*3] このように，変数の値を決めればただひとつに関数値が定まる関数のことを**陽関数** (explicit function) とよび，一方で，ひとつの変数の値に対して関数値が一意に定まらないような関数のことを**陰関数** (implicit function) とよびます．例えば，y を x の関数として，$x^2 + y^2 = 1$ を満たすように定義すると，x の選び方によっては方程式を満たす y が 2 つある場合があります．この方程式は座標平面上では円を表し，x 座標を定めても図形上の点は一意には定まらないことに対応します．

定理 3.1: 判別式と共有点の個数

放物線 $P : y = ax^2 + bx + c$ と直線 $L : y = mx + n$ との共有点の個数について，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ の判別式を D とすると，

$$D > 0 \iff P \text{ と } L \text{ は共有点を 2 つもつ}$$
$$D = 0 \iff P \text{ と } L \text{ は共有点を 1 つだけもつ}$$
$$D < 0 \iff P \text{ と } L \text{ は共有点をもたない}$$

例として，放物線 $P : y = 2x^2$ と，3 本の直線

$$L_1 : y = x + 1$$
$$L_2 : y = x - \frac{1}{8}$$
$$L_3 : y = x - 1$$

について考えてみましょう．それぞれを座標平面上に描いたものを図 6 に示しました．

まず，P と L_1 について，2 式を連立すると，$2x^2 = x$ となります．整理して $2x^2 - x = 0$ を得ますから，判別式は，$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 1 > 0$ です．これは，P と L_1 のグラフが共有点を 2 点もつことに対応しています．

同様に, P と L_2 について, $2x^2 = x - \frac{1}{8}$ から, $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ を得るので, 判別式は $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 0$ です．これは，P と L_2 のグラフが共有点を 1 点のみもつことに対応しています．

最後に, P と L_3 について, $2x^2 = x - 1$ から, $2x^2 - x + 1 = 0$ を得るので, 判別式は $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$ です．これは，P と L_3 のグラフが共有点をもたないことに対応しています．

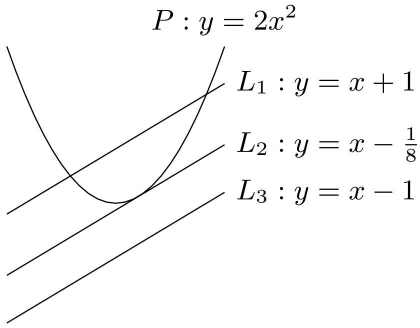


図 6　P と L_1, L_2, L_3 との位置関係

P と L_2 のように，放物線と直線の共有点が 1 点のみのとき，放物線と直線が**接する**といい，その直線を放物線の**接線** (tangent line, tangent)，それらの共有点を特に**接点** (point of tangency) とよびます．[*4]

[*4] より一般には，直線が曲線に “接する” とは，直線が曲線上の点を通り，かつ直線の傾きがその点での曲線の微分係数に等しいことをいいます．

例題 10

傾きが -2 であり，放物線 $y = x^2$ に接する直線の方程式を求めよ.

直線の方程式を $y = -2x + k$ と書くと，交点の x 座標を求める方程式は，$x^2 = -2x + k \iff x^2 + 2x - k = 0$ となる．判別式は，$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 4 + 4k$ と表せ，直線が放物線の接線であることは $D = 0$ となることと同値であるから，$k = -1$ と求まる．したがって，直線の方程式は $y = -2x - 1$.

3.3 放物線がつくる直線

この節では，放物線上の 2 点を通る直線，および放物線の接線について，特に放物線が原点を頂点とする場合に簡単な式で表せることをみます.

定理 3.2: 放物線 $y = ax^2$ 上の 2 点を通る直線

放物線 $y = ax^2$ 上の相異なる 2 点 $(p, ap^2), (q, aq^2)$ を通る直線の方程式は,

$$y = a(p + q)x - apq \tag{3.2}$$

と表せる.

Proof. (演習問題) □

放物線の中でも，特に原点を頂点とするものについては，グラフ上の 2 点を通る直線の方程式が，放物線の “開きかた” を特徴づけるパラメータ a と，2 点の x 座標とを用いてシンプルな表式でまとまることが分かります. [*5]

例題 11

放物線 $y = 2x^2$ 上の 2 点 $(-1, 2), (2, 8)$ を通る直線の方程式を求めよ.

定理 3.2 より，$y = 2 \cdot (-1 + 2)x - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 2x + 4$

ところで，定理 3.2 には，2 点が「相異なる」という但し書きがありました．平面上で 1 点を通る直線は無数に存在するので，相異なる 2 点を指定して初めて直線の方程式が得られる，という点でこの但し書きがあることに不思議はありませんが，結果的に得られた式 (3.2) をよくみると，2 点が等しい場合，すなわち $p = q$ であっても不都合はないように思えます．そこで，試しに q を p で置き換えてみると,

$$y = 2apx - ap^2$$

という方程式が得られます．このとき，直線が通る点として指定したのは放物線上のただ 1 点 (p, ap^2) のみですが，直線が一意に定まっています．これは何を意味しているのでしょうか．q を p で置き換え

[*5] この表式に (単なる「計算の結果」以上の) 解釈を何か与えることはできるのでしょうか……．たまたま計算がうまくいくだけ，というような気もします.

る前に $p < q$ が成り立っているとすると，式 (3.2) の直線は，図 7 に示されるように描かれます．ここで，$q = p$ なる状況を考えるために，すぐに置き換えるのではなく，q をだんだんと p に近づけていく操作を施すと，2 点を通る直線は，図 8 に点線で示したように変化し，q が p に限りなく近づくと，図 8 に実線で示した，点 (p, ap^2) における放物線の接線が得られると予想できます．このような操作によって放物線上の 2 点が重なる状況をつくると，指定する放物線上の点が 1 つだけ (にみえる状況) でも直線を一意に定めることができ，そのときに得られる直線は指定した点での放物線の接線となります．

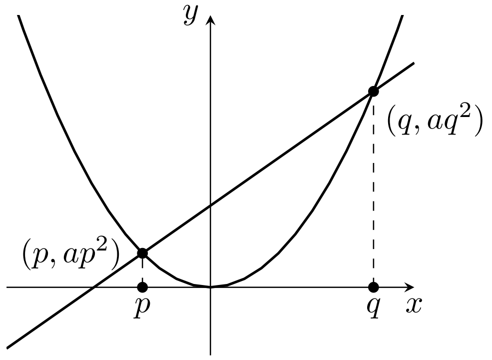


図 7　放物線 $y = ax^2$ と，その上の 2 点 $(p, ap^2), (q, aq^2)$ を通る直線

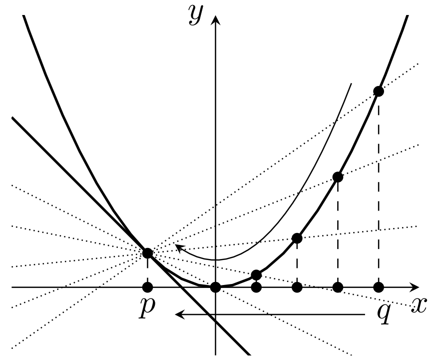


図 8　q を p に近づけていったときの直線の変化の様子

以上の考察をまとめると，次のことが成り立ちます．

定理 3.3: 放物線 $y = ax^2$ の接線

放物線 $y = ax^2$ の，点 (p, ap^2) における接線の方程式は，以下で与えられる．

$$y = 2apx - ap^2$$

特に重要なのは，接線の傾きが $2ap$ と表せることです．p は接点の x 座標なので，接線の傾きが接点の x 座標に比例することが分かります．一般に，ある関数の描くグラフの接線の傾きの大きさは，接点で[*6] その関数の値がどれほど急激に変化するかに対応し，また傾きの正負は関数の値が増加するか，減少するかに対応するので，以降では関数のグラフ上のある点での接線の傾きを，その点での関数の「瞬間の傾き」とよぶことにします．すると，関数 $y = ax^2$ は，x に比例した瞬間の傾きをもつ関数であるといえます．また，その比例係数が a であることは，a が放物線の開き方を特徴づけるパラメータであったことと対応しています．つまり，a が大きいほど，同じ x の値に対する $y = ax^2$ の瞬間の傾きが大きいので，放物線がより “尖った” 形になるということです．

1 次関数が任意の区間に対する変化の割合が等しい，すなわち関数の瞬間の傾きが常に一定である性質をもっていたことを思い出し，1 次関数 $y = mx$ と 2 次関数 $y = ax^2$ の変化の仕方をまとめると，表 1 のようになります．

*6　本来は「接点の x 座標に対応する関数の入力 x に対して」というほうが厳密ですが，関数のグラフの x 座標と関数の入力としての x を同一視して，このような表現をすることがよくあります．

	関数の値	関数の“傾き”	関数の“傾き”の“傾き”
1 次関数 $y = mx$	x に比例	常に一定	常に 0
2 次関数 $y = ax^2$	x^2 に比例	x に比例	常に一定

表 1　$y = mx$ と $y = ax^2$ の変化の仕方の比較

2 次関数が 1 次関数と異なる点で最も特筆すべきなのは，関数の瞬間の傾きが x に依存することです．x の値によって瞬間の傾きが正にも負にもなる，すなわち 1 つの関数の中で関数値が増加も減少もすることが，(定義域を限定しない)2 次関数に最大値，あるいは最小値が存在することの理由であると理解できます．

演習問題

2 次方程式の 2 つの解法の利用

以下の式を因数分解せよ．因数分解した結果現れる係数あるいは定数は，必ずしも有理数でなくてよい．

$$x^2 + 5x + 3$$

解と係数の関係 1

2 次方程式の解と係数の関係についての定理 2.1 を，解の公式を用いて示せ．

解と係数の関係 2

和が s，積が t になるような 2 つの実数 (等しくてもよい) が存在する条件を，s, t を用いて表せ．

2 次関数の最大値・最小値

実数全体を定義域とする x についての 2 次関数 $y = x^2 + 6x - 2$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ (ヒント: 平方完成を用いる)．

放物線の図形的な性質

放物線 $y = x^2$ 上の任意の点からの，直線 $y = -\frac{1}{4}$ への距離と点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ への距離とが等しいことを示せ．ただし，点と直線との距離とは，その点から直線に下ろした垂線の長さである．一般に，座標平面上の 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) との距離が $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ で与えられることを用いてよい．

放物線 $y = ax^2$ 上の 2 点を通る直線の方程式

原点を頂点とする放物線 $y = ax^2$ 上の相異なる 2 点 $(p, ap^2), (q, aq^2)$ を通る直線の方程式が，

$$y = a(p + q)x - apq$$

と表せること (定理 3.2) を示せ．

無限はしご回路

(1) $R_1 = 1.0\,\Omega$ および $R_2 = 6.0\,\Omega$ の抵抗が，図 9 に示すように組み合わされた 1 端子対回路の合成抵抗を求めよ．ただし，一般に抵抗 r_1，r_2 を直接接続したときの合成抵抗 r_d と，並列接続したときの合成抵抗 r_p が，

$$r_\mathrm{d} = r_1 + r_2, \quad r_\mathrm{p} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

で与えられることを用いてよい．結果は小数第 2 位を四捨五入し，小数第 1 位までの小数で表せ．

(2) 図 9 の回路に対し，R_2 を並列に，R_1 を直列に接続することを繰り返し，R_1, R_2 が無限に連なった回路が (仮想的に) できたとする (図 10)．この 1 端子対回路の合成抵抗を求めよ．

(3) 現実には，抵抗を無限に連ねることは不可能である．図 9 の回路を図 10 の回路と等価にするためにはどのようにすればよいか．

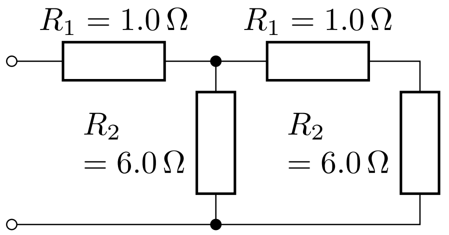


図 9　2 段はしご回路

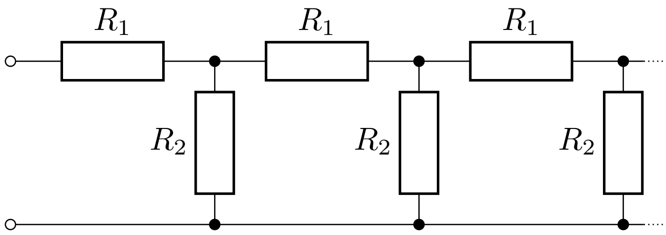


図 10　無限はしご回路

演習問題の解答

2 次方程式の 2 つの解法の利用

与式を x についての式とみなし，これを 0 と等置した 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

を (解の公式を用いて) 解くと，解は

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

となる．したがって，定理 1.3 より，方程式としての同値関係

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \iff \left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

が成り立つ．x^2 の係数を比較すると，上の 2 つの方程式の左辺は多項式として等しいことがいえ，したがって，

$$x^2 - 5x + 3 = \left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

と因数分解できる．

解と係数の関係

解の公式を書き下し，計算すればよい．2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の 2 解 α, β は

$$\alpha = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

と書けるので，これらの和と積について，

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \frac{-p + \cancel{\sqrt{p^2 - 4q}} - p - \cancel{\sqrt{p^2 - 4q}}}{2} = -p \\
\alpha\beta &= \frac{(-p + \sqrt{p^2 - 4q})(-p - \sqrt{p^2 - 4q})}{4} \\
&= \frac{(-p)^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q
\end{aligned}$$

が成り立つ．

解と係数の関係 2

2 次方程式 $x^2 - sx + t = 0$ に実数解 $x = \alpha, \beta$ が存在するならば，解と係数の関係により，これらは $\alpha + \beta = s$, $\alpha\beta = t$ を満たす．逆に，和が s，積が t である 2 数は，2 次方程式 $x^2 - sx + t = 0$ の解となる．したがって，2 次方程式 $x^2 - sx + t = 0$ に実数解が存在することは，題意を満たす 2 実数が存在することと同値である．この 2 次方程式の判別式 D は $D = s^2 - 4t$ と書けるので，定理 2.2 により，求める条件は $D = s^2 - 4t \geq 0$ である．

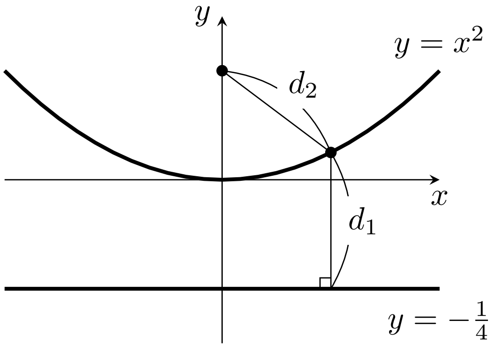
2 次関数の最大値・最小値

$y=x^2+6x-2$ を x について平方完成すると，

$$y=(x+3)^2-11$$

となる．x は任意の値を取るので，$x+3$ も任意の値を取る．関数の形から，y が最小になることは $(x+3)^2$ が最小になることと同値なので，y は $x+3=0$，すなわち $x=-3$ のときに最小値 -11 を取る．

放物線の図形的な性質



放物線 $y=x^2$ 上の点 P は，定数 p を用いて，$\mathrm{P}\bigl(p,p^2\bigr)$ と書ける．点 P が $y\geq 0$ の領域に存在することを考えると，点 P から直線 $y=-\frac{1}{4}$ までの距離 d_1 は

$$d_1=p^2-\left(-\frac{1}{4}\right)=p^2+\frac{1}{4}$$

と表せる．また，点 P から点 $\bigl(0,\frac{1}{4}\bigr)$ までの距離 d_2 は，与えられた点と点との距離の公式を用いれば，

$$\begin{aligned} d_2&=\sqrt{(p-0)^2+\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2}\\ &=\sqrt{p^4+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{16}}\\ &=\sqrt{\left(p^2+\frac{1}{4}\right)^2}\\ &=p^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

と計算できるので，$d_1=d_2$ が示せた．

放物線 $y=ax^2$ 上の 2 点を通る直線の方程式

2 点 $(p,ap^2),(q,aq^2)$ を通る直線の傾きは，

$$\frac{ap^2-aq^2}{p-q}=\frac{a(p^2-q^2)}{p-q}=\frac{a(p+q)(p-q)}{p-q}=a(p+q)$$

と計算できる．さらに，直線が (p, ap^2) を通ることから，その方程式は，

$$
\begin{aligned}
y &= a(p+q)(x-p) + ap^2 \\
&= a(p+q)x - a(p+q)p + ap^2 \\
&= a(p+q)x - apq
\end{aligned}
$$

と求まる．

無限はしご回路

(1) 部分ごとに抵抗を合成していく．図 11 に示す A の部分は R_1 と R_2 の直接接続なので，その合成抵抗は $R_\mathrm{A} = R_1 + R_2 = 7.0\,\Omega$．B の部分は，A の部分に R_2 を並列接続したものとみなせるので，その合成抵抗は $R_\mathrm{B} = R_2 R_\mathrm{A}/(R_2 + R_\mathrm{A}) = 42/13 \fallingdotseq 3.23\,\Omega$．B の部分にさらに R_1 を直列接続すると全体の回路となるので，全体の合成抵抗は $R_\mathrm{B} + R_1 \fallingdotseq 4.2\,\Omega$.

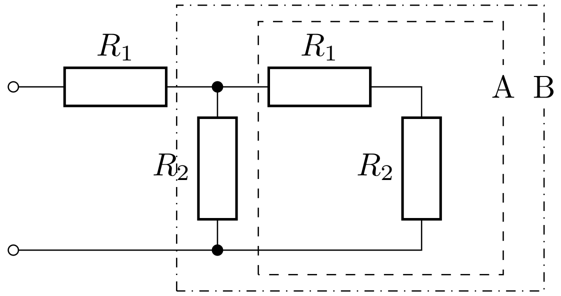


図 11　2 段はしご回路

(2) 抵抗が無限に連なった回路の合成抵抗を R_∞ とし，この回路に，さらに R_2 を並列接続したのち R_1 を直列接続することを考える．このとき，(1) と同様に考えて，R_∞ と R_2 との並列接続の合成抵抗は $R_\infty R_2/(R_\infty + R_2) = 6R_\infty/(R_\infty + 6)$．さらに R_1 を直列に接続すれば，全体の合成抵抗は $R_1 + 6R_\infty/(R_\infty + 6) = 1 + 6R_\infty/(R_\infty + 6)$ となる．抵抗が無限に連なっているならば，この操作によって全体の抵抗は R_∞ のまま変化しないので，

$$R_\infty = 1 + \frac{6R_\infty}{R_\infty + 6}$$

が成り立つ．整理して，R_∞ に関する 2 次方程式

$${R_\infty}^2 - R_\infty - 6 = 0$$

を得るので，これを解いて，$R_\infty = -3, 2$．$R_\infty > 0$ なので，求める抵抗値は $R_\infty = 2.0\,\Omega$.

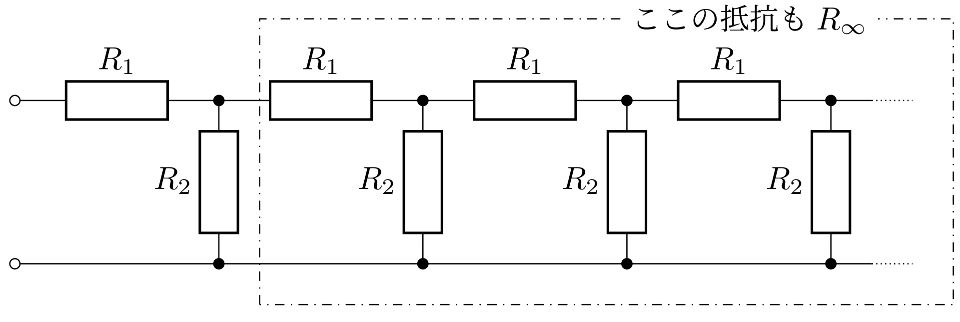


図 12　無限はしご回路．一部だけ切り出してもやはり無限はしご回路である．

(3) 例えば，次のようにすればよい．

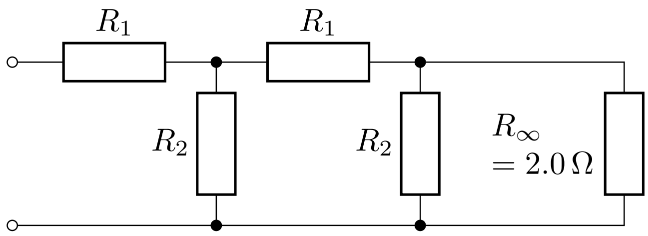


図 13　2 段はしご回路を無限はしご回路と等価にするための方法の例