中学問題集

最終更新: 2024 年 4 月 4 日 8 時 39 分

目次

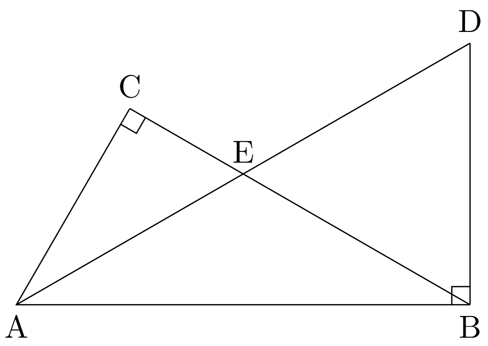
平面図形 (中 2 まで)

$\boxed{1}$

平面上に，相異なる 2 点 A，B がある．点 C，点 D を，以下の条件を満たすようにとる．

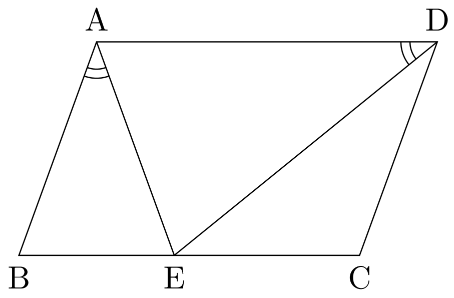
i) $\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$
ii) $\angle \mathrm{ABD} = 90^\circ$
iii) $\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{DAB}$
iv) 点 C，点 D は直線 AB に対し同じ側にある．

線分 BC と線分 AD の交点を E とする．BE = BD を示せ．



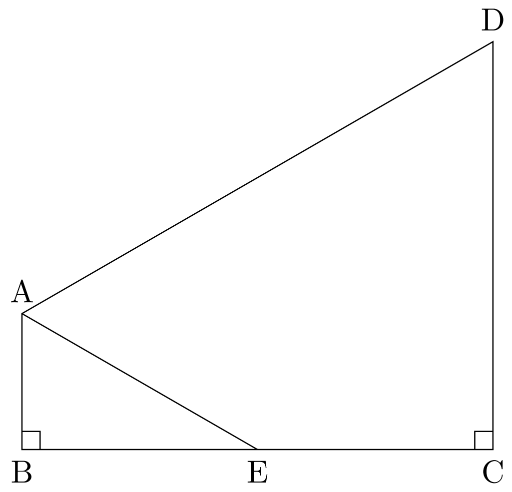
$\boxed{2}$

下図のような平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に，点 E を AB = AE となるようにとったところ，$\angle$BAE = $\angle$ADE となった．DA = DE を示せ．



$\boxed{3}$

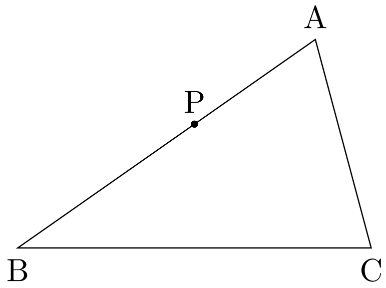
$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C} = 90^\circ$, $\mathrm{AB} + \mathrm{DC} = \mathrm{AD}$ を満たす台形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとる．$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{DAE}$ ならば $\mathrm{BE} = \mathrm{EC}$ となることを示せ.



(2010 年度 東京都立新宿高校・改)

$\boxed{4}$

$2\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{BAC}$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 AB 上に，$\mathrm{BP} = \mathrm{AC}$ を満たす点 P がある．点 Q が辺 BC 上を動くとき，$\mathrm{AQ} + \mathrm{QP}$ の最小値が辺 BC の長さと等しいことを示せ．

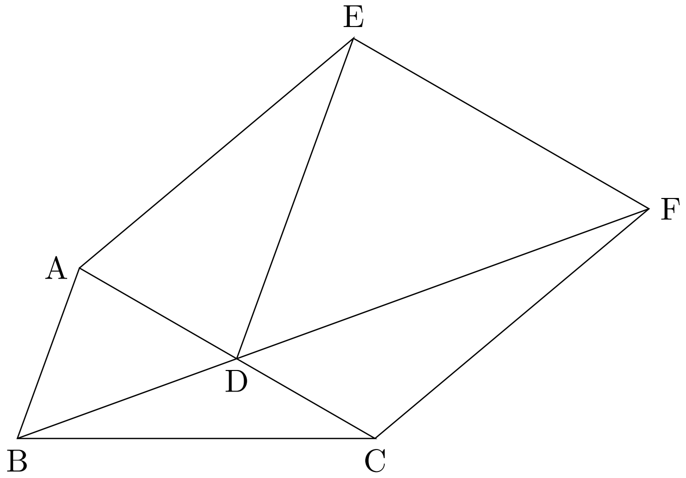


$\boxed{5}$

$\triangle$ABC は AB $<$ AC を満たす．いま，点 D と点 E を，以下の条件を満たすように定める．

i) 点 D は辺 AC 上にある．
ii) 点 E は直線 AC に関して点 B と反対側にある．
iii) $\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DAE}$　(対応関係に注意せよ)

さらに，点 E を通り直線 AC に平行な直線と，直線 BD との交点を F とする．このとき，AE $\parallel$ CF を示せ．



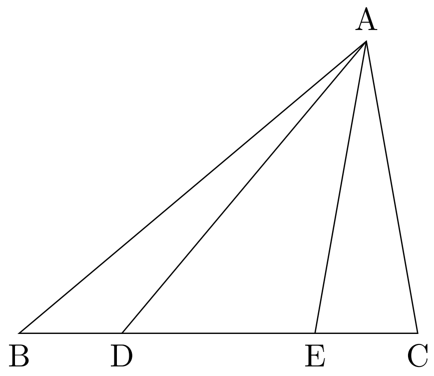
(2020 年度 大阪府公立入試・改)

$\boxed{6}$

$\triangle$ABC の辺 BC 上 2 点 D，E がこの順で並んでおり，BD $=$ CE を満たす．

$$\angle \mathrm{ADE} = 50^\circ, \quad \angle \mathrm{DAE} = 30^\circ, \quad \angle \mathrm{ACE} = 80^\circ$$

であるとき，$\angle$ABD の大きさはいくらか．解答に至った過程も記せ．

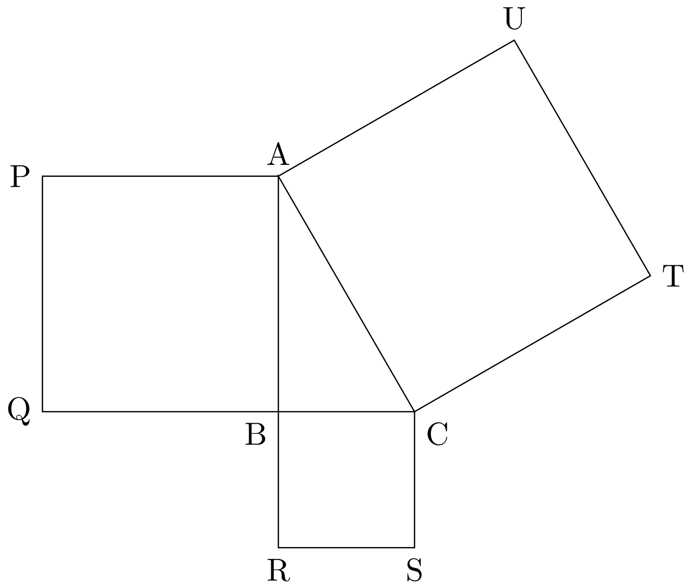


(2013 年度 算数オリンピック)

$\boxed{7}$

下図のように，それぞれが直角三角形 $\triangle$ABC の各辺と一辺を共有する 3 つの正方形を考える．このとき，正方形 ACTU の面積が，正方形 PQBA と正方形 BRSC の面積の和に等しいこと $(\star)$ を，以下の手順で示せ．[*1]

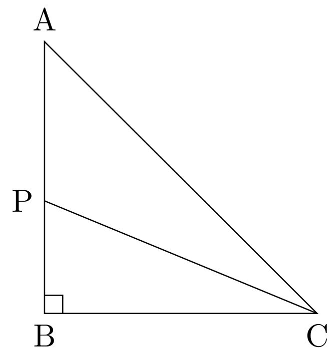
1) $\triangle \mathrm{ACS} \equiv \triangle \mathrm{TCB}$ を示せ．
2) 点 B を通り直線 CT に並行な直線が，線分 AC および線分 UT と交わる点を順に X，Y とするとき，四角形 XCTY の面積と正方形 BRSC の面積が等しいことを示せ．
3) $(\star)$ を示せ．



[*1] これは，かの古代エジプトの偉大な数学者 Euclid が，『原論』第 1 巻の命題 47(今でいう三平方の定理) を証明するのに用いた方法である (とされている)．

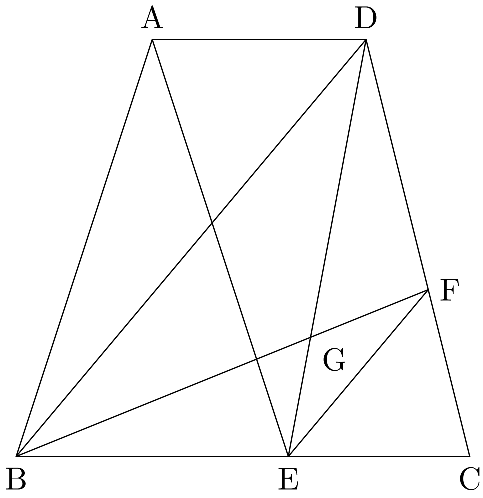
$\boxed{8}$

$\angle\mathrm{B} = 180^\circ$ である直角二等辺三角形 ABC の，$\angle\mathrm{C}$ の二等分線と辺 AB との交点を P とする．$\mathrm{BC} + \mathrm{BP} = \mathrm{AC}$ を示せ．



$\boxed{9}$

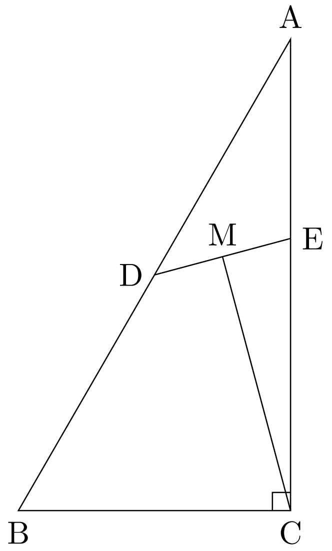
AD $\parallel$ BC である台形 ABCD の辺 BC 上に点 E を，辺 CD 上に点 F を，BD $\parallel$ EF となるようにとり，線分 BF と線分 ED の交点を G としたところ，BG : GF = 5 : 2 となった．△ABE と △GEF の面積比を，最も簡単な整数の比で表せ．



(2021 年度 広島県公立入試)

$\boxed{10}$

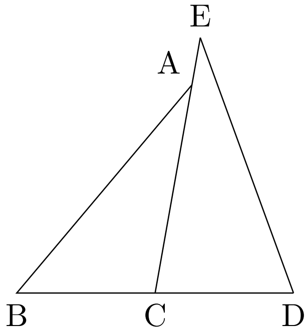
下図において，$\triangle ABC$ は $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形であり，点 D は辺 AB の中点である．また，点 E は辺 AC 上の点で，$BC = CE$ である．さらに，点 M は線分 DE の中点である．$AB = 2$，$BC = 1$ のとき，$DE \perp MC$ を示せ．



(2024 年度 神奈川県公立入試・改)

$\boxed{11}$

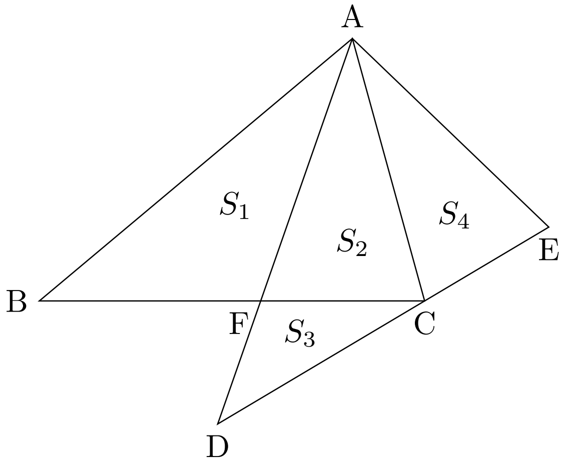
$\angle$B が鋭角である $\triangle$ABC がある．辺 BC の C 側の延長上に，点 D を BC $=$ DC となるようにとり，辺 AC の A 側の延長上に，点 E を AB $=$ ED となるようにとる．このとき，$\angle$BAC $= \angle$CED を示せ．



$\boxed{12}$

下図のように，2 つの合同な $\triangle$ABC と $\triangle$ADE があり，AB $=$ AD $= 3$，AC $=$ AE $= 2$ である．点 C は辺 DE 上にあり，$\angle$BAD $=$ $\angle$DAC $=$ $\angle$CAE が成り立っている．

辺 AD と辺 BC との交点を F とし，$\triangle$ABF，$\triangle$AFC，$\triangle$FDC，$\triangle$ACE の面積を順に S_1，S_2，S_3，S_4 とするとき，$S_1 : S_2 : S_3 : S_4$ を最も簡単な整数の比で表わせ．



(2022 年度 第 3 回駿台中学生テスト)

場合の数・確率

$\boxed{1}$

k を 1 以上 6 以下の整数とする．

1) サイコロを 2 回振るとき，出目の最大値が k となる確率を，k を用いて表わせ．
2) サイコロを n 回振るとき，出目の最大値が k 以下となる確率を，n と k を用いて表わせ．
3) サイコロを n 回振るとき，出目の最大値が k となる確率を，n と k を用いて表わせ．

ただし，サイコロはどの目も同様に確からしく出るものとする．

$\boxed{2}$

1) $a+b+c=10$ を満たす 0 以上の整数 (a,b,c) の組は何通りあるか.

2) $a+b+c=10$ を満たす自然数 (a,b,c) の組は何通りあるか.

ただし，a,b,c はそれぞれ区別するものとする．例えば，$(a,b,c)=(2,2,6)$ と $(a,b,c)=(2,6,2)$ などは異なる場合として考えよ.

3

あなたは，あるテレビ番組にプレイヤーとして参加している．あなたの目の前には 3 つの箱があり，そのうちのどれか 1 つはアタリで，中には景品が入っている．他の 2 つの箱はハズレで，中には何も入っていない．次に示す手順でゲームを行う．

i) あなたは，3 つの箱の中から 1 つを選ぶ．
ii) 番組の司会者は，残り 2 つの箱の中からハズレであるものを 1 つ選んで箱を開け，それがハズレであることを示す．
iii) あなたには，選ぶ箱を，最初に選んだものから ii) で開けられなかった方の箱に一度だけ変更できる権利が与えられる．
iv) 選んだ箱の中身を確認する．

iii) で，あなたは選ぶ箱を変更すべきか？

$\boxed{4}$

サイコロを n 回投げるとき，出目の和が 7 で割り切れる確率を P_n と書くことにする．

1) P_2 を求めよ．
2) P_3 を求めよ．
3) P_{n+1}を P_n を用いて表わせ．

ただし，サイコロはどの目も同様に確からしく出るものとする．

(1994 年度 京都大学 (文系)・改)

$\boxed{5}$

赤と白の 2 つの箱があり，それぞれの箱には，0 と書かれたカードが 1 枚，1 と書かれたカードが 1 枚，2 と書かれたカードが 2 枚，3 と書かれたカードが 3 枚の計 7 枚のカードが入っている．いま，赤，白それぞれの箱から 1 枚のカードを取り出して，同じ数字のカードが出たら 1 点，異なる数字のカードが出たら，書かれた数字の和を得点とする．このとき，以下の設問に答えよ．

1) 得られる得点の最大値と最小値はいくらか.
2) 点数が 4 点となる確率はいくらか.
3) 点数が 1 点となる確率はいくらか.

(2022 年度 桐蔭学園高校)

$\boxed{6}$

A，B，C の 3 つの袋があり，A の中には 1 から 6，B の中には 1 から 10，C の中には 1 から 4 の数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入っている．A，B，C の袋から 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードに書かれた数字を a，b，c して，直線 ℓ を $y = \frac{b}{a}x + c$ と定めるとき，以下の設問に答えよ．

1) ℓ が直線 $y = 2x$ と平行になる確率を求めよ．
2) ℓ が点 $(6, 10)$ を通る確率を求めよ．

(令和 5 年度 愛光学園高校)

式と計算

$\boxed{1}$

実数 P を，以下のように定める．

$$P = \frac{1}{100} \times \frac{2}{100} \times \cdots \times \frac{199}{100} \times \frac{200}{100}$$

P と 2 とは，どちらが大きいか．理由をつけて述べよ．

$\boxed{2}$

1) $1 \times 2 \times \cdots \times 9$ の一の位の数は何か.

2) $1 \times 2 \times \cdots \times 99$ の末尾には 0 がいくつ並ぶか.

$\boxed{3}$

以下の空欄を埋めよ．ただしひとつのカタカナに 0〜9 のひとつの整数が対応する．

1) $\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)^2$ を計算すると，$\boxed{\textbf{アイウ}}$となる．

2) $2\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\sqrt{206}$ を計算すると，$\sqrt{\boxed{\textbf{エオカ}}}$ となる．

(2023 年度 灘高校)

$\boxed{4}$

すべての正の数 a, b に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(ヒント: すべての正の数 a, b に対して，$(a-b)^2 \geq 0$ が成り立つ．)

2 次方程式・関数

$\boxed{1}$

以下の x についての 2 次方程式が解を 1 つしかもたないような a の値をすべて求めよ.

$$3(x+a)^2 = (2a^2-1)(x+a) + x^2 - 2ax - 3a^2$$

(2024 年度 灘高校)

$\boxed{2}$

$3x^2-4x-2=0$ の 2 つの解を a, b とする．このとき，

$$(3a^2-4a+2)(6b^2-8b)$$

の値を求めよ．

(2024 年度 早稲田実業学校高等部)