(中学) 確率これだけは

最終更新: 2024 年 3 月 24 日 20 時 18 分

1　言葉の定義

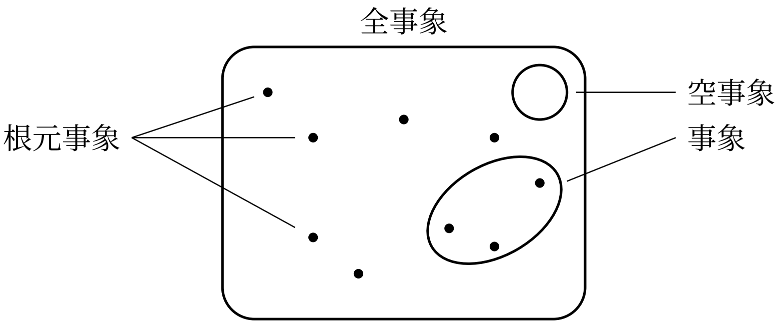
まずは，場合の数，そして確率を考えるための言葉を (できるだけ集合の言葉を使わずに) 用意します．

試行　繰り返し行うことのできる実験や観測，操作のことを**試行** (trial) とよぶ．

根元事象　ただひとつの (1 回だけ試行を行ったときに得られうる) 結果のことを**根元事象** (elementary event) とよぶ．

事象　試行の結果起こり得る現象のことを**事象** (event) とよぶ．事象は，0 個，1 個，あるいは複数個の根元事象をまとめたものである．0 個の根元事象からなる事象のことを特に**空事象** (empty event)，試行に対するすべて根元事象からなる事象のことを特に**全事象** (whole event) とよぶ．

場合の数　ある事象をなす根元事象の個数のことを，その事象が起こる**場合の数**とよぶ．



2　場合の数

確率を求めるためには，事象が起こる場合の数を知ることが重要です (後述)．この節では，場合の数がもつ基本的な性質を確認したあとで，いくつかの典型的な場合の数を求める方法を示します．

2.1　場合の数の性質

定理 2.1 (和の法則)**.** 事象 A が起こる場合の数が m 通り，事象 B が起こる場合の数が n 通りであるとき，事象 A と事象 B が<u>同時に起こらない</u>ならば，事象 A または事象 B が起こる場合の数は，$m+n$ 通りである．

Proof. それぞれの事象をなす根元事象の個数の和を考えれば明らかです．　□

例題　サイコロを 1 回振り，1 の目が出る，または偶数の目が出る場合の数はいくらか．

解答　1 の目が出る場合の数は 1 通り，偶数の目が出る場合の数は 3 通り．「1 の目が出る」という事象と「偶数の目が出る」という事象は同時に起こらないので，和の法則から，求める場合の数は $1+3=4$ 通り．

定理 2.2 (積の法則)**.** 事象 A が起こる場合の数が m 通りであり，事象 A をなすそれぞれの根元事象に対して事象 B の起こり方が n 通りあるとき，事象 A と事象 B がどちらも起こる場合の数は，mn 通りである．

Proof. 事象 A をなす根元事象と，事象 B をなす根元事象とのペアの個数を考えれば明らかです． □

例題　大小のサイコロを 2 つ振るとき，目の出方の総数は何通りあるか．

解答　片方のサイコロの目の出方に対して，もう一方のサイコロの目の出方が 6 通りあるので，積の法則から，求める場合の数は $6 \cdot 6 = 36$ 通り．

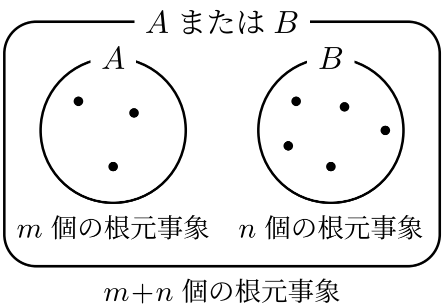


図 1　和の法則のイメージ図

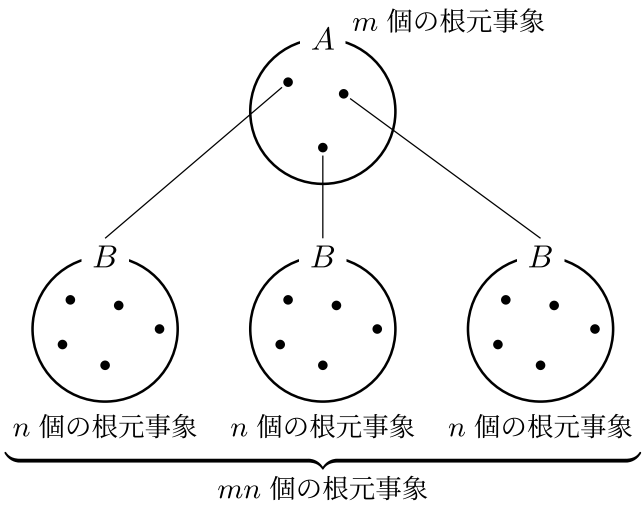


図 2　積の法則のイメージ図

2.2　順列・組合せ

2.2.1　順列

定理 2.3 (順列の総数)**.** 異なる n 個のモノの中から r 個選んで並べる方法の総数 (場合の数) を ${}_n\mathrm{P}_r$ と書き，

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}_{r\text{ 個}} $$

と表せる．

このようにしてできた列のことを**順列** (permutation) とよびます．

Proof. r 個の “枠” を用意して，それぞれにモノを当てはめることによって順列をつくると考えます (下図)．1 番目の枠に当てはめるモノの選び方は n 通りあります．すでに n 個のモノの中から 1 個選んでいるので，2 番目の選び方は $n-1$ 通りあります．このようにして続けていき，最後にそれぞれの枠への当てはめ方の数をすべて掛け算することによって，目的の式が得られます (積の法則)． □

1 番目	2 番目	3 番目		$r-1$ 番目	r 番目
$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$
n 通り	$n-1$ 通り	$n-2$ 通り		$n-r+2$ 通り	$n-r+1$ 通り

要するに，n 個の中から r 個選んで並べる場合の数を知りたければ，n から 1 ずつ減らしていきながら r 個の数字の積をつくればよいということです．

特に，n 個のモノをすべて並べる場合の数は，上式で $r = n$ として，

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 $$

と表せます．このように，非負の整数 n から 1 ずつ減らしていきながら，1 になるまで n 個の数字を掛け算したものを $n!$ と表し，n の**階乗** (factorial) とよびます ($0! = 1$ と約束します)．

例題　A，B，C，D の 4 文字を並べる方法は何通りあるか．

解答　${}_4\mathrm{P}_4 = 4! = 24$ 通り．

2.2.2　組合せ

定理 2.4 (組合せの総数)**.** 異なる n 個のモノの中から異なる r 個を選ぶ (並べない)方法の総数 (場合の数) を ${}_n\mathrm{C}_r$ と書き，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}_{r\text{ 個}}} $$

と表せる．

このように，並べる順番を区別せずに選んでできたもののことを**組合せ** (combination) とよびます．

Proof. まず n 個の中から r 個選んで並べ，その上で「選び方は同じだが順番だけが異なる」場合を除く，と考えます．n 個の中から r 個選んで並べる場合の数は，先ほどの定理から ${}_n\mathrm{P}_r$ です．ひとつの「r 個の選び方」に対して，「選び方は同じだが順番だけが異なる」並べ方は，選んだ r 個の並び替え方の個数ぶん，すなわち ${}_r\mathrm{P}_r = r!$ だけあります．したがって，${}_n\mathrm{P}_r$ を ${}_r\mathrm{P}_r$ で割れば，目的の式を得ます．　□

具体例をみてみましょう．いま，A，B，C，D，E の 5 つのアルファベットの中から，3 つを選ぶ場合の数を考えます．5 つの中から 3 つ選んで並べるとき，例えば $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ という並べ方と，$(\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{B})$，あるいは $(\mathrm{C}, \mathrm{B}, \mathrm{A})$ などといった並べ方はすべて区別され，別々のものであると考えることになります．一方で，5 つの中から 3 つを選ぶときには，先に挙げた並べ方の違いは区別せず，すべて「A と B と C を選んだものだ」と考えなければなりません．このように，「順列では区別するが組み合わせでは区別されない」並べ方が，いまの例では A，B，C の並べ替えの数，すなわち ${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$ 通りだけあるということになります．したがって，求める場合の数は，${}_5\mathrm{P}_3 / 3! = 10$ 通りです．

r 個を選んで並べる

A と B と C を選ぶ
(A, B, C)
(A, C, B)
(C, B, A)
$\vdots$
${}_r\mathrm{P}_r = r!$ 通り

A と B と D を選ぶ
(A, B, D)
(A, D, B)
(D, B, A)
$\vdots$
${}_r\mathrm{P}_r = r!$ 通り

$\cdots\cdots$

全部で ${}_n\mathrm{P}_r$ 通り

図 3　n 個の中から r 個選ぶイメージ図 $(r = 3)$

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ には，次の性質があります．

定理 2.5. 組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

Proof. ここでは，組合せの考え方に基づいた証明を示します．${}_n\mathrm{C}_r$ は，n 個のモノの中から，r 個を選ぶ方法の総数です．これは，n 個のモノの中から，残りの (選ばれない)$n-r$ 個を選ぶことと同義です．この方法の総数は ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ 通りありますから，目的の等式を得ます．□

例題　8 人の中から代表を 2 人選ぶ方法は何通りあるか．
解答　${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り．

2.2.3　同じモノを含む順列

定理 2.6. n 個のモノの中に，区別しないモノがそれぞれ p 個，q 個，r 個，……ずつあるとき，それらを並べる方法の総数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-p}\mathrm{C}_q \cdot {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \cdots = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots} $$

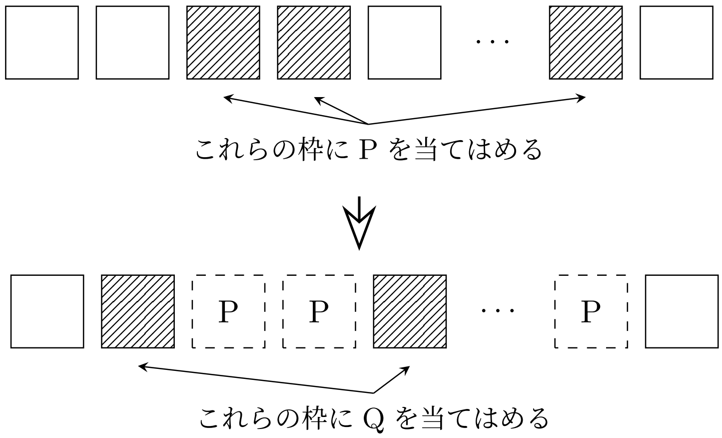
と表せる．

Proof. ここでは，便宜上，p 個あるモノを P，q 個あるモノを Q，などと表すことにします．

まず，n 個の "枠" に 1 つずつモノを当てはめることで順列をつくると考えます (下図)．P をどの枠に入れるかの選び方は，n 個の枠の中から p 個を選ぶと考えて，${}_n\mathrm{C}_p$ 通りです．この時点で，n 個の枠のうち p 個が P で埋められていることから，空いている枠は $n-p$ 個あります．Q をどの枠に入れるかの選び方は，それらの空いている枠の中から q 個を選ぶと考えて，${}_{n-p}\mathrm{C}_q$ 通りです．このようにして続けていくことで，すべての枠の埋め方，つまり n 個のモノの並べ方は，${}_n\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-p}\mathrm{C}_q \cdot {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \cdots$ という積で表せることが分かります．

次に，n 個をすべて区別して並べたあとで同じモノの区別をなくす，という方法で順列をつくると考

えます．n 個すべてのモノを区別したとき，その並べ方の総数は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 通りです．p 個の異なるモノの並べ方は，${}_p\mathrm{P}_p = p!$ 通りあるので，上記の $n!$ 通りの中から p 個の順序の区別をなくした並べ方は $n!/p!$ 通りになります．同様の考え方で，$n!$ 通りの中から同じモノの順序の区別をなくしていくと，並べ方の総数は，$n!/(p!\,q!\,r!\cdots)$ という分数でも表せることが分かります． □



例題　A，A，B，B，B，C の 6 文字を並べる方法は何通りあるか．
解答　${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 = 6!/(2!\,3!\,1!) = 60$ 通り．

3　確率

3.1　確率の定義

ある事柄が，どの程度 “起こりやすいか” を定量的に評価するための考え方が**確率** (probability) です．

定義 3.1 (古典的確率)**.** ある 1 回の試行に対して，どの結果 (根元事象) も同程度の確かさで起こると考えられるとき，事象 A が起こる確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{a}{N}$$

と定義される．ここで，a は事象 A が起こる場合の数，N は全事象の場合の数である．

定義中で用いた「どの根元事象も同程度の確かさで起こると考えられる」ことを，根元事象が**同様に確からしい** (equally likely) と表現します．では，根元事象が「同様に確からしく」起こるかどうかは，どのようにして判断すればよいのでしょうか．結論から述べれば，これは “経験的/常識的な” 感覚に頼るしかありません．根元事象が同様に確からしく起こるということは，別の表現をすれば「どの根元事象が起こる確率も等しい」ということに他なりませんが，これでは確率を定義するために確率の概念を持ち出すことになり，堂々巡りになってしまいます．これではいつまで経っても話が進まないので，古典的確率に則って確率を考えるときには，根元事象の確からしさについて，我々の経験，あるいは常識を根拠にした上で議論を始める必要があるというわけです．そうはいっても，様々なケースを考える上で，個別に根元事象の確からしさを吟味するのも煩雑なので，実際に確率を計算するときには，次の仮定に従うことにします．

試行に複数の “モノ”(サイコロ，コイン，トランプ，……) を用いるとき，それらがすべて区別できるとして数え上げた根元事象は，すべて同様に確からしいとしてよい.[*1]

この仮定は，直観と一致します．例えば，100 万本のハズレくじと 1 本のアタリくじの中から 1 本だけくじを引くことを考えましょう．100 万本のハズレくじが区別できないとすると，根元事象は「引いたくじがアタリくじ」であることと「引いたくじがハズレくじ」であることの 2 つになります．この 2 つの根元事象が同様に確からしいとすると，くじ引きの結果アタリが出る確率は，古典的確率の定義式で $a = 1$，$N = 2$ として，$P(\text{アタリ}) = 1/2 = 0.5$ となります．つまり，100 万 1 本のくじの中にアタリくじは 1 本しかないのに，アタリとハズレは半々で出る，ということになってしまいます．一方で，100 万本のハズレくじが区別できて，それぞれに「ハズレくじ 1，ハズレくじ 2，……」と名前をつけることができるとします．すると，根元事象は，「引いたくじがアタリくじ」，「引いたくじがハズレくじ 1」，「引いたくじがハズレくじ 2」，……，「引いたくじがハズレくじ 1000000」の合計 100 万 1 個になります．上記の仮定によれば，これらの根元事象は同様に確からしいはずですから，古典的確率の定義式で，$a = 1$，$N = 1000001$ として，$P(\text{アタリ}) = 1/1000001 \fallingdotseq 0.000001$ となり，「100 万 1 本のくじの中からただ 1 本のアタリくじを引き当てるのはかなり難しい (そのような確率は低い) だろう」という “直観” どおりの結論が得られます.

3.2 確率の性質

定理 3.1. 任意の事象 A について，その事象が起こる確率は $P(A)$ は，

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

を満たす．特に，全事象 U，空事象 $\emptyset$ に対して，

$$P(U) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 全事象はすべての根元事象を集めてきたものなので，任意の事象 A の場合の数 a と，全事象の場合の数 N に対して $(0 \leq)\, a \leq N$ が常に成り立つことに注意すれば，古典的確率の定義から明らかです. □

$P(U) = 1$ は「試行を行ったときに何らかの結果が必ず得られる」，$P(\emptyset) = 0$ は「試行を行ったときに何の結果も得られないことはない」とそれぞれ解釈することができます.

定理 3.2 (和の法則)**.** 事象 A と事象 B が<u>同時に起こらないとき</u>，事象 A または事象 B が起こる確率は，$P(A) + P(B)$ である.

Proof. 場合の数における和の法則から直ちに従います. □

[*1] 当然，このような仮定は常に正しいわけではありません．例えば，気体の性質を調べるのに，個々の気体分子を区別できるとして考えると，現実に即さない結果が得られてしまいます.

定理 3.3 (積の法則)**.** 事象 A と事象 B がどちらも起こる確率は $P(A) \cdot P(B)$ である.

Proof. 場合の数における積の法則から直ちに従います. □

定理 3.4 (余事象)**.** 事象 A が起こらない確率は，$1 - P(A)$ である.

ある事象に対して，「その事象が起こらない」というのもまたひとつの事象であり，これを，その事象に対する**余事象** (complementary event) とよびます.

Proof. 事象 A の余事象を $\bar{A}$ と表すと，ある試行に対して必ず事象 A または事象 $\bar{A}$ のどちらか一方が起こり，同時に起こることはありません (つまり，事象 A が起こるか起こらないかしかない). したがって，確率の和の法則から $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ が成り立ち，変形すれば $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ として目的の式が得られます. □

4　確率変数と期待値 (発展項目)

4.1　確率変数

ここまでは，様々な種類の試行について，その結果起こりうる事象を考えてきました (「サイコロで 3 の目が出る」，「コインを投げると表が出る」，「くじ引きでアタリを引く」，など). これらを統一的に扱うために，**確率変数** (random variable) を定義します.

定義 4.1 (確率変数)**.** 確率変数とは，試行に対するそれぞれの根元事象に，1 つずつ実数を対応させたものである.

具体例をみてみましょう.「サイコロを振る」という試行に対する根元事象として，「1 の目が出る」，……，「6 の目が出る」の 6 個を考えることができます. これらの根元事象のそれぞれに，実数を対応させることを考えます. ひとつの方法は，「1 の目が出る」に 1，「2 の目が出る」に 2，……と対応させることです.[*2] 対応させた整数を X と書けば，X は確率変数になります.[*3]

確率変数を用いると，色々な事象を式で表現することができます. 先のサイコロの例では，「4 の目が出る」という事象は，$X = 4$ という等式で，また，「3 以下の目が出る」という事象は，$X \leq 3$ という不等式で表現することができます.

[*2] 事象と実数との対応は，この他にも考えることができますが，考える事象が扱いやすくなるように確率変数を定めるのが適切でしょう.

[*3] この表現はあまり厳密ではありません. 確率 “変数” と名付けられてはいるものの，確率変数は標本空間の元 (根元事象) に実数を定める写像 (関数) ですから，「『サイコロの目の出方』と『出た目』との対応関係」を「確率変数」というべきです. しかしながら，実際に確率変数を扱う際には，このように，根元事象に対応させた実数そのものを確率変数だと捉えると分かりやすい場合が多くあります.

4.2 期待値

期待値 (expected value) とは，確率変数の (重み付き) 平均のことで，ある確率変数が得られる確率と，その確率変数との積の総和で求められ，以下のように定義されます．

定義 4.2 (離散型確率変数の期待値)**.** 確率変数 X の取る値が $X = x_1, x_2, \cdots$ であり，確率変数 $X = x_i$ が得られる確率を $P(X = x_i)$ と書くとき，X の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots$$

と定義される．

期待値は，(独立な) 試行を何度も繰り返し行ったときの，確率変数の平均であると捉えられます．

例題 サイコロを 1 回振るとき，出目の期待値はいくらか．

解答 サイコロを 1 回振るときに出る目を X とすると，X は確率変数となり，

$$P(X = 1) = \cdots = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

である．X の期待値は出目の期待値となるから，求める値は，

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2} (= 3.5)$$

基本問題

$\boxed{1}$

1 から 6 までの整数が 1 つずつ書かれたカードが計 6 枚ある．これらのカードのうち 3 枚を選び並べることによってできる 3 桁の整数はいくつあるか.

$\boxed{2}$

6 人が一列に並ぶ方法は何通りあるか.

$\boxed{3}$

30 人の生徒がいるクラスから，3 人の学級委員を選ぶ方法は何通りあるか.

$\boxed{4}$

6 個のアルファベット G，O，O，G，L，E の並べ方は何通りあるか.

$\boxed{5}$

アタリくじが 4 本，ハズレくじが 6 本入っている袋から，くじを 2 本引く.

1) 1 本がアタリ，もう 1 本がハズレである確率を求めよ.
2) 2 本ともアタリである確率を求めよ.
3) 2 本ともハズレである確率を求めよ.

$\boxed{6}$

6 枚のコインを投げるとき，ちょうど 3 枚が表になる確率を求めよ.

$\boxed{7}$

サイコロを投げ，3 の倍数が出たら 2 点，それ以外の目が出たら 1 点を獲得するゲームを 1 回行うとき，得られる点数の期待値を求めよ.

演習問題

組合せの総数の表式

n 個のモノの中から r 個を選ぶ方法の総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ が,

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

と表せることを示せ.

円順列

正六角形の 6 個の頂点のそれぞれに，A から F までのアルファベットを 1 つずつ割り振る方法は何通りあるか．ただし，回転によって一致する割り振り方は，まとめて 1 通りであるとして考えよ.

ボールを箱に詰める方法

1) 区別のつく 6 個のボールを，区別のつく 3 個の箱に詰める方法は何通りあるか．ただし，空になる箱があってもよいものとする.
2) 区別のつかない 6 個のボールを，区別のつく 3 個の箱に詰める方法は何通りあるか．ただし，空になる箱があってもよいものとする.

対角線の本数

正 n 角形の n 個の頂点のうち，異なる 2 点を端点とする線分は，正 n 角形の辺，あるいは対角線のいずれかである．この考え方を用いて，正 n 角形の対角線の総数を求めよ.

サンクトペテルブルクのパラドクス

コインを表が出るまで投げ続け，初めて表が出たときに賞金をもらえるゲームを考える．もらえる賞金は，1 回目で表が出たら 2 円，2 回目で初めて表が出たらその倍の 4 円，3 回目で初めて表が出たらその倍の 8 円，……と定める．ただし，使うコインは表と裏が同様に確からしく出るものとする.

1) n 回目に初めて表が出たときにもらえる賞金の額を，n を用いて表わせ.
2) n 回目に初めて表が出る確率を，n を用いて表わせ.
3) このゲームでもらえる賞金の額の期待値を求めよ．この結果はどのように解釈できるか.

基本問題の解答

$\boxed{1}$

${}_6\mathrm{P}_3 = 120$ 通り．

$\boxed{2}$

$6! = 720$ 通り．

$\boxed{3}$

${}_{30}\mathrm{C}_3 = 4060$ 通り．

$\boxed{4}$

すべての文字を区別すれば $6!$ 通り．このうち，2 つの G と 2 つの O の並べ方はそれぞれ $2!$ 通りあり，これらの順序は区別しないので，求める場合の数は，$6!/(2! \cdot 2!) = 180$ 通り．

$\boxed{5}$

全事象は ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通り．

1) アタリの引き方は ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通り，ハズレの引き方は ${}_6\mathrm{C}_1 = 6$ 通りあるので，アタリとハズレを 1 本ずつ選ぶ選び方は $4 \times 6 = 24$ 通り．したがって，求める確率は $24/45 = 8/15$.
2) 2 本のアタリの引き方は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．したがって，求める確率は $6/45 = 2/15$.
3) 2 本のハズレの引き方は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り．したがって，求める確率は $15/45 = 1/3$.

$\boxed{6}$

全事象は $2^6 = 64$ 通り．6 枚のうち，表になる 3 枚の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り．したがって，求める確率は $20/64 = 5/16$.

$\boxed{7}$

2 点を獲得する確率は $2/6 = 1/3$．一方 1 点を獲得する確率は $2/3$ であるから，1 回で獲得できる点数の期待値は，$2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ 点.

演習問題の解答

組合せの総数の表式

それぞれ区別しない r 個，$n-r$ 個のモノ (計 n 個) の並べ方を考えると，同じモノを含む順列の考え方から，その総数は

$$
{}_n\mathrm{C}_r \cdot {}_{n-r}\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}
$$

と 2 通りに表すことができる．左辺について，${}_{n-r}\mathrm{C}_{n-r} = 1$ であることから，

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}
$$

と表せる．

定義式を，次のように変形することによっても示すことができる．

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_r &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}^{r\ \text{個}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}_{r\ \text{個}}} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}
\end{aligned}
$$

円順列

頂点をすべて区別すれば，6 個のアルファベットの割り振り方は $6!$ 通り．頂点の区別をなくすと，1 つの並べ方に対して，回転によって一致するものが 6 通りある．したがって，求める場合の数は，$6!/6 = 120$ 通り．

ボールを箱に詰める方法

1) 1 つのボールに対して，どの箱に入れるかの選択肢が 3 通りある．したがって，求める場合の数は，$3^6 = 729$ 通り．
2) 区別のつかない 6 個のボールと，区別のつかない 2 つの仕切りを並べ，仕切られたボールの個数を，左から順に 3 つの箱に入れる個数に対応させる，と考える．並べるものは全部で 8 個あり，そのうちの 6 個，2 個はそれぞれ区別しないので，求める場合の数は $8!/(6!\cdot 2!) = 28$ 通り．

対角線の本数

n 個の頂点から異なる 2 頂点を選ぶ方法は ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 通り．このうち，辺になるものが n 通りあるので，対角線の本数は，

$$
\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}
$$

より $n(n-3)/2$ 本.

サンクトペテルブルクのパラドクス

1) 1 回目では 2 円，2 回目では 4 円，3 回目では 8 円……と倍々になっていくので，n 回目に初めて表が出れば，もらえる賞金は 2^n 円.

2) n 回目に初めて表が出るということは，$n-1$ 回目まではすべて裏が出て，n 回目では表が出る，ということである．コインは表が出る確率と裏が出る確率が等しく 1/2 であるから，求める確率は $(1/2)^n = 1/2^n$.

3) 1)，2) の結果から，賞金の額とその賞金がもらえる確率との積は,.

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$$

となり，n によらない．したがって，賞金の期待値は，$1 + 1 + \cdots = \infty$．したがって，このゲームを何回も繰り返し行えば，賞金が無限にもらえることになる.[*4]

*4 しかしながら，これは直観に反する ($2^{10} = 1024$ 円以上の賞金がもらえる確率は $1/1024 \fallingdotseq 0.001$ にすぎない).「効用」の考え方を用いることで，このパラドクスを回避することができる (数学者ダニエル・ベルヌーイによる説明).