パラボラアンテナが信号を一点に集めて受信する仕組みを，簡単なモデルを使って考えよう． パラボラアンテナの反射器は，放物線を対称軸の回りに回転させた形(放物面; paraboloid)をしているが， 簡単のため，ここでは対称軸を含む平面で放物面を切断した断面(放物線)を考えることにする．

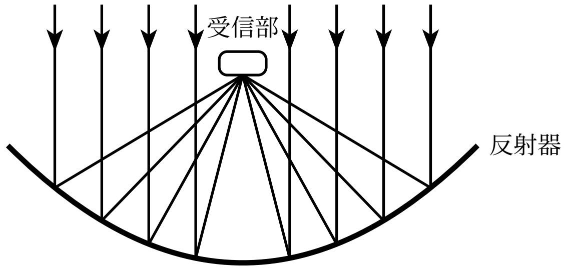

図 1: パラボラアンテナの断面の模式図

図 2: 野辺山宇宙電波観測所 45 m 電波望遠鏡
(出典: 国立天文台野辺山宇宙観測所 HP[1])

以下の問では，座標平面上で原点を頂点とする放物線 $P : y = ax^2$ をパラボラアンテナの反射器に見立てて考える．

問 1 座標平面上で，2 直線が垂直に交わる条件を考える．いま，いずれも原点を通る 2 直線 $M : y = mx$ $(m > 0)$ と $N : y = nx$ $(n < 0)$ が，原点で垂直に交わっている．

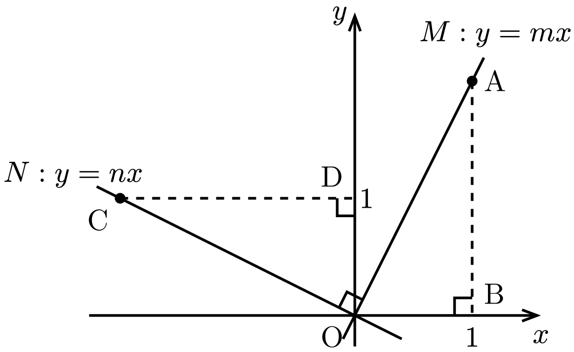

図 3: 垂直に交わる 2 直線

直線 M 上で x 座標が 1 である点 A から x 軸へ下ろした垂線の足を B $(1, 0)$，直線 N 上で y 座標が 1 である点 C から y 軸へ下ろした垂線の足を D $(0, 1)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(a) $\triangle \mathrm{OAB} \equiv \triangle \mathrm{OCD}$ を示せ．

(b) AB の長さを， m を使って表せ．また，CD の長さを， n を使って表せ．(正負に注意すること．)

(c) 前問までの結果を用いて， $mn = -1$ が成り立つことを示せ．

この問の状況に適切な平行移動を加えることを考えると，一般に，座標平面上で 2 直線が垂直に交わるとき，それらの傾きの積が -1 になることが分かる．

問 2 放物線 P 上の頂点でない点 (r, ar^2) $(r \neq 0)$ で放物線 P に接する直線 T (接線)について，以下の問いに答えよ．

(a) 直線 T の傾きが $2ar$ と表されることを示せ．

(b) 直線 T の方程式を求めよ．

[1] https://www.nro.nao.ac.jp/gallery/images/45m_002.jpg

ただし，放物線と直線が “接する” とは，放物線と直線がただ 1 点を共有することである．

問 3 アンテナに対し，反射器の中心軸と平行に入射した電波は反射器で反射され，進行方向が変わる．電波が曲線に反射されるとき，反射位置における曲線の法線(接線に垂直な直線)と入射波がなす角度(入射角)と，反射波がなす角度(反射角)とが等しくなるように反射波の進行方向が決まる(図 4)．また，入射波(を延長した直線)と，反射波(を延長した直線)は，接線を対称軸として線対称の関係にある．

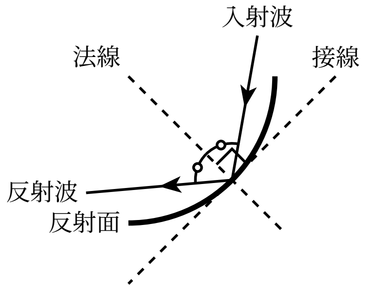

図 4: 曲面(曲線)上での電波の反射

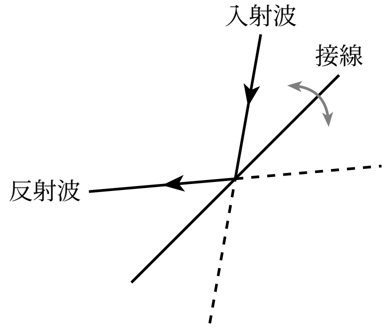

図 5: 入射波と反射波は接線に関して線対称

ここでは，入射波は放物線 P の軸(y 軸)に平行かつ，軸とは異なる直線 $I : x = r\ (r \neq 0)$ として表されるものに限定する．すると，直線 I と放物線 P との交点 (r, ar^2) は電波の反射点を表し，この点での接線は問 2 で求めた直線 T となる．前述のように，直線 I と直線 R が直線 T に関して線対称であることを利用して，反射波を表す直線 R の方程式を求めたい．

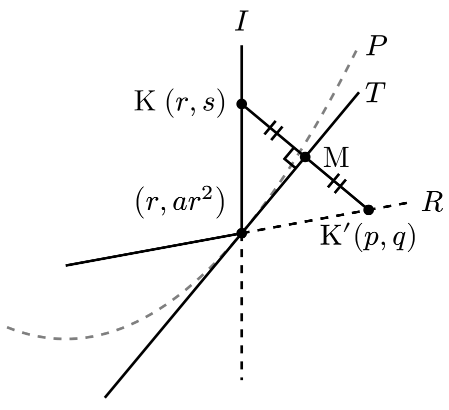

図 6: 軸に平行な入射波の反射

直線 I 上の点 K (r, s) を直線 T に関して対称移動した点を K$'$ とし，その座標を K$'(p, q)$ と書くとする．このとき，2 点 K, K$'$ の中点 M は直線 T 上にあり，直線 KK$'$ は直線 T と直交する(図 6)．以下の問いに答えよ．

(a) M の座標を， p, q, r, s を使って表せ．

(b) M が直線 T 上にあることを用いて， a, p, q, s の間に成り立つ関係式を求めよ．

(c) 直線 KK$'$ の傾きを p, q, r, s を使って表せ．

(d) 直線 KK$'$ と直線 T が直交することを用いて， a, p, q, r, s の間に成り立つ関係式を求めよ．

(e) (b)および(d)で求めた 2 つの関係式から s を消去することにより， a, p, q, r の間に成り立つ関係式を求め，さらにそれを q について解け．

(f) (e)で求めた関係式において， $p \to x,\ q \to y$ と置き換え，整理することによって，直線 R の方程式を(a, r を含んだ形で)求めよ．直線 R の切片が r によらないことを確かめよ．

解答

問 1 (a) 仮定から $\mathrm{OB}=\mathrm{OD}=1$，$\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{ODC}=90^\circ$．さらに，$\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ であることから，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ-\angle\mathrm{AOD}=\angle\mathrm{COD}$．以上から，対応する 1 辺とその両端の角がそれぞれ相等しいので，$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OCD}$．

(b) 点 A は直線 M 上の点であるから，その y 座標は $y=m\cdot 1=m$．よって，$\mathrm{AB}=m$．点 C は直線 N 上の点であるから，その x 座標は，$1=nx$ を解いて，$x=1/n$．$n<0$ であることに注意すると，$\mathrm{CD}=-1/n$．

(c) (a)より $\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OCD}$ であるから，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}$．(b)の結果を用いると，$m=-1/n$ が成り立つ．両辺に n をかけて，$mn=-1$ を得る．

問 2 (a) 直線 T が (r,ar^2) を通ることから，傾きを k と書くと，その方程式は $y=k(x-r)+ar^2$，すなわち $y=kx+ar^2-kr$ と表せる．放物線 P の方程式は $y=ax^2$ であったから，T と P の交点の x 座標を求める方程式は，2 つの方程式から y を消去して，

$$kx+ar^2-kr=ax^2$$

となる．これを整理すると，2 次方程式

$$ax^2-kx+kr-ar^2=0$$

が得られる．T と P が共有点をただ 1 つもつことは，この 2 次方程式の解が 1 つであることと同値であり，このとき判別式 D は 0 となる．判別式 D は,

$$D=(-k)^2-4\cdot a\cdot(kr-ar^2)=k^2-4ark+4a^2r^2$$

と計算できるので，$D=0$ とすると，k についての 2 次方程式

$$k^2-4ark+4a^2r^2=0$$

を得る．左辺は $(k-2ar)^2$ と因数分解できるので，$D=0$ を満たす k は $k=2ar$ である．[2]

(b) 傾きが $2ar$ で点 (r,ar^2) を通る直線の方程式は,

$$y=2ar(x-r)+ar^2=2arx-ar^2$$

問 3 (a) 点 M は 2 点 K,K' の中点であるから，その座標は $\mathrm{M}\left(\dfrac{p+r}{2},\dfrac{q+s}{2}\right)$．

(b) 点 M の x 座標，y 座標は，問 2 で求めた直線の方程式を満たすので,

$$\frac{q+s}{2}=2ar\cdot\frac{p+r}{2}-ar^2$$

が成り立つ．整理して，$q+s=2apr$ を得る．

(c) 傾きの定義から，$\dfrac{q-s}{p-r}$．

(d) 問 1 の結果から，直交する 2 直線の傾きの積は -1 である．直線 T の傾きは $2ar$ であったから，(c)の結果も利用して,

$$\frac{q-s}{p-r}\cdot 2ar=-1$$

が成り立つ．整理して，$2ar(q-s)=r-p$ を得る．

[2] あるいは，傾きが $2ar$ で点 (r,ar^2) を通る直線の方程式を先に求め，その直線と放物線との交点が 1 つだけであることを示すのでもよい.

(e) (d)で得た関係式の両辺を $2ar$ で割り，(b)で得た関係式と辺々足すと，

$$\begin{array}{rl} & q+\cancel{s}=2apr \\ +) & q-\cancel{s}=\dfrac{1}{2a}-\dfrac{p}{2ar} \\ \hline & 2q=2apr-\dfrac{p}{2ar}+\dfrac{1}{2a} \end{array}$$

が従うので， q について解いて，

$$q=\left(ar-\frac{1}{4ar}\right)p+\frac{1}{4a}$$

を得る．

(f) (e)で得た関係式において， $p\to x,\ q\to y$ と置き換えて，直線 R の方程式

$$y=\left(ar-\frac{1}{4ar}\right)x+\frac{1}{4a}$$

を得る．切片は $1/(4a)$ であり，どこで反射するか(r の値)にかかわらず，反射波は点 $\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ を通ることが分かる．