1　目標

次のような無理関数の極限を，x が小さいときに成り立つ近似的な展開 $(1+x)^r \simeq 1+rx$ を利用して計算する方法を学ぶ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

2　解説

2.1　一般化二項定理

$n\in\mathbb{N}$ のとき，二項定理により，

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,x^k=1+nx+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^2+\cdots+x^n$$

が成り立つのであった．この展開式を $r\in\mathbb{R}$ の場合に拡張することを考える．そのために，次の**一般化二項係数**を導入する．

定義 I: 一般化二項係数

$r\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$ に対し，一般化二項係数 $\binom{r}{k}$ を次のように定義する．

$$\binom{r}{k}:=\frac{\overbrace{r(r-1)\cdots(r-k+1)}^{k\text{ 個}}}{k!}$$

例 1

$$\binom{\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}=\frac{3}{8},\quad \binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}=-\frac{1}{16},\quad \binom{-3}{2}=\frac{(-3)\cdot(-4)}{2!}=6$$

一般化二項係数は，高校までで学ぶ二項係数の計算式 ${}_n\mathrm{C}_k=\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k\text{ 個}}/k!$ において，n として実数を許したものになっており，直観的には自然な拡張といえるだろう．いま二項係数が一般化できたのだから，これを二項定理に適用することを考えれば，次の等式が成り立つことが期待される．

定理 1: 一般化二項定理 (r, x が実数の場合)

$r \in \mathbb{R}$ について，任意の $x \in D \subset \mathbb{R}$ に対し，

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2 \cdot 1} x^2 + \cdots$$

が成り立つ．ただし，D は収束域で，

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} & (r \text{ が非負整数のとき}) \\ \{x \mid |x| < 1\} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ここでは，二項定理において単にそのベキを実数としただけなので，数学的に正当化されるかどうかは別に考える必要がある．証明には多項式の微分についての知識を用いることになるが，詳細は p.5 に譲ることにする．一般化二項定理を用いれば，例えば次のような展開を得ることができる．

例 2

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k = 1 - x + x^2 - \cdots$$

2.2　$x \to 0$ における高次項の扱い

目標を振り返ると，考えたいのは $x \to 0$ での極限であった．そこで，一般化二項定理を用いて展開した式の各項が $x \to 0$ でどのように振る舞うかについて見る．まずは，簡単のために $r = 3$ として，

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

を考える．$|x|$ が小さい範囲での振る舞いを見るために，いくつかの x の値を代入して計算してみると，各項は次の表に示す値になる．

x	第 2 項 $3x$	第 3 項 $3x^2$	第 4 項 x^3
0.1	0.3	0.03	0.001
0.01	0.03	0.0003	0.000 001
0.001	0.003	0.000 003	0.000 000 001

この結果から，x が小さくなるにつれ，第 2 項に対する第 3 項の比，第 3 項に対する第 4 項の比も小さくなっていくことがわかる．このことは，

$$\frac{(\text{第 3 項})}{(\text{第 2 項})} = \frac{3x^2}{3x} = x \xrightarrow{x \to 0} 0, \quad \frac{(\text{第 4 項})}{(\text{第 3 項})} = \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

となることから容易に理解できる．つまり，x の多項式 $f(x)$ について $x \to 0$ での振る舞いを考えるならば，低次の項の寄与に対する高次の項の相対的な寄与は 0 に近づくため，x の低次の項のみを考え

れば近似的に $f(x)$ の振る舞いを表すことができるのである．この考え方を用いれば，先に例に上げた $(1+x)^3$ については，$|x|$ が十分小さいとき，

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x$$

と近似できることがわかる (ここでは，x の低次の項を取るという意味で記号 $\simeq$ を用いている)．実際に $y=(1+x)^3$ と $y=1+3x$ のグラフを描いてみると，図 1 のようになる．図 1 を見ると，$|x|$ が小さい範囲，すなわち y 軸の付近で，$y=1+3x$ のグラフが $y=(1+x)^3$ のグラフによく沿っていることがわかる．ここで，$y=1+3x$ は直線を表すので，この近似が $y=(1+x)^3$ の $x=0$ における接線を与えることになるということにも注意したい．

ちなみに，より高次の項までを考慮して，

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x+3x^2$$

と近似した場合のグラフも描いてみると図 2 のようになり，2 次の項まで取ったことで，1 次までの近似と比較して $(1+x)^3$ に近づいていることがわかる．このように，高次の項までを考慮するほど近似は良好になるが，同時に扱う項の数が増え複雑になるため，どの程度の次数まで考えるかは都度適切に判断する必要がある．

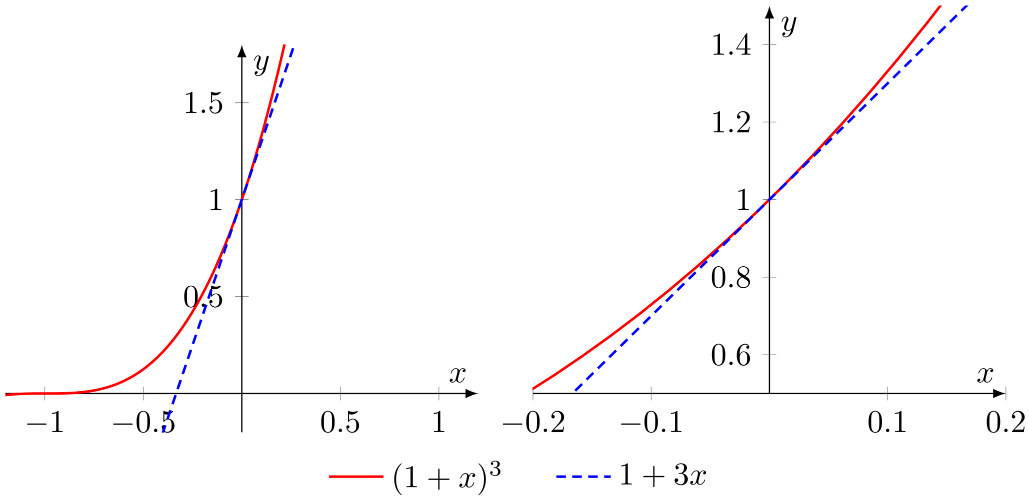

図 1　$y=(1+x)^3$ と $y=1+3x$ のグラフ．右は y 軸との交点付近を拡大して示している．

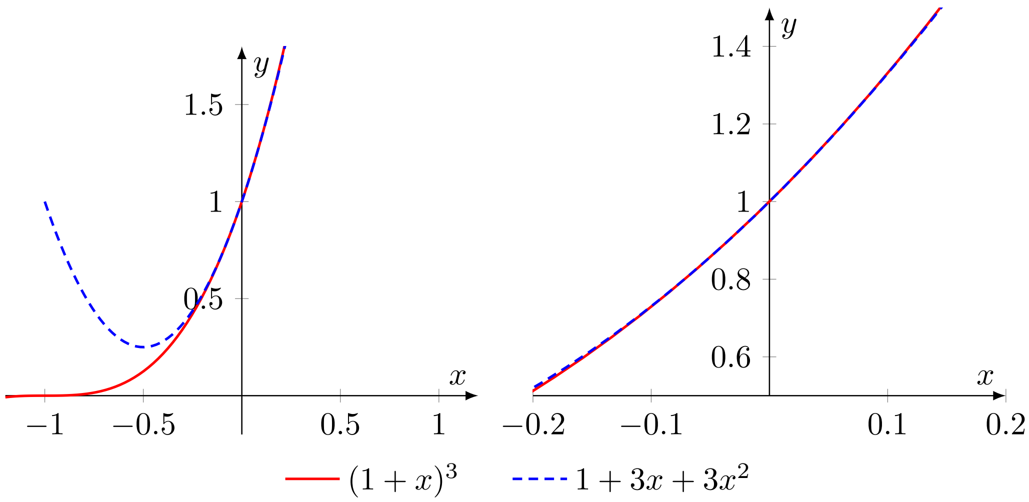

図 2　$y=(1+x)^3$ と $y=1+3x+3x^2$ のグラフ．右は図 1 右図と同じ範囲で y 軸との交点付近を拡大して示している．

2.3　近似による極限の計算

前節までの議論を踏まえて，$(1+x)^r$ の $x \to 0$ における振る舞いを考える．ひとまず x の最低次の項までを取ることにすれば，

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2\cdot 1} + \cdots \simeq 1 + rx \quad (|x| \ll 1)$$

という近似を得ることができる．

例 3

$|x|$ が十分小さいとき，x の最低次までを取る近似で，

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x, \qquad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \simeq 1 - x$$

この近似を用いれば，はじめに示したいくつかの極限は，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &\simeq \frac{1+\frac{1}{2}x-1}{x} &&= \frac{1}{2} &&\xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \\
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x} &\simeq \frac{\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)}{x} &&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x &&\xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \\
\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &\simeq \frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}{\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)} &&= -x &&\xrightarrow{x\to 0} 0
\end{aligned}$$

3　補足

3.1　一般化二項定理の証明 (のようなもの)

まずは，$(1+x)^r$ $(r \in \mathbb{R})$ が，次のように係数 $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ を用いて x のベキで展開できることを仮定する[*1].

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots \tag{$*$}$$

$x=0$ として両辺を比較すると，$c_0 = 1$ を得る．次に，左辺を x で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^r = r(1+x)^{r-1}$$

他方右辺を x で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots) = c_1 + 2\,c_2\,x + 3\,c_3\,x^2 + \cdots$$

となるので，

$$r(1+x)^{r-1} = c_1 + 2\,c_2\,x + 3\,c_3\,x^2 + \cdots$$

が成り立つ．$x=0$ として両辺を比較すると，$c_1 = r$ を得る．同様にして，式 $(*)$ の両辺を x で 2 回微分すると，

$$r(r-1)(1+x)^{r-2} = 2\,c_2 + 3\cdot 2\,c_3\,x + 4\cdot 3\,c_4\,x^2 + \cdots$$

が成り立つので，$x=0$ として両辺を比較すると，$c_2 = r(r-1)/2$ を得る．つまり，式 $(*)$ の左辺は，x で k 回微分することで，

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1+x)^r = \underbrace{r(r-1)\cdots(r-k+1)}_{k\ \text{個}}(1+x)^{r-k}$$

となり，$x=0$ とすれば $r(r-1)\cdots(r-k+1)$ となる．他方右辺は，x で k 回微分した後に $x=0$ を代入することを考えると，この操作で 0 でない値となりうるのは $c_k\,x^k$ の項のみである[*2]．$c_k\,x^k$ にこの操作を施すと，

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(c_k\,x^k\right) = k(k-1)\cdots 2\,c_k = k!\,c_k$$

となるので，両辺について比較すれば，$r(r-1)\cdots(r-k+1) = k!\,c_k$ より，係数 c_k は，

$$c_k = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} =: \binom{r}{k}$$

[*1] この展開が正当であるかどうかは，Taylor の定理による余剰項が 0 に収束するかどうかを確認する必要があり，当然このような展開が不可能である場合も存在する (例えば $r=-1$ の場合について $x \to -x$ と書き換え，$x=2$ を考えてみよ)．しかし，今回は最終的に $x \to 0$ とし $x=0$ 近傍での振る舞いに注目するため，この展開は正当な結果を与えることになる．

[*2] k 次より低次の項は k 回の微分で 0 となり，k 次より高次の項は k 回の微分で x の 1 次以上の項として残るため，$x=0$ とすると 0 となる．

と決定される．以上の議論から，$(1+x)^r$ が x のベキで展開できるならば，

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

が成り立つことがわかる．

3.2　$x \to a$ の取り扱い

考える極限が $x \to a\,(\neq 0)$ の場合も，$x' = x - a$ と変数変換すれば $x' \to 0$ となるので，同様の考え方で計算することができる．

例 4

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ を考える．$x' = x - 1$ と変数変換すれば，

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x'\to 0} \frac{\sqrt{x'+4}-2}{(x'+1)^2-1}$$

であり，分母と分子についてそれぞれ x' の最低次まで取ると，

$$\frac{\sqrt{x'+4}-2}{(x'+1)^2-1} = \frac{2\left(1+\frac{x'}{4}\right)^{1/2}-2}{(1+x')^2-1} \simeq \frac{2\left(1+\frac{x'}{8}\right)-2}{(1+2x')-1} = \frac{1}{8}$$

より求める極限は $1/8$ である．

3.3　$x \to \infty$ の取り扱い

$x \to \infty$ の極限を考える場合，$x \to 0$ を考えたときは反対に，x について高次の項の寄与を考えればよい．

例 5

極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x}-2x\right)$ を考える．x が十分大きいとき，

$$\sqrt{4x^2-3x} \simeq \sqrt{4x^2} = 2x$$

より，求める極限は，

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x}-2x\right) = 2x - 2x = 0$$

3.4　一般の関数への応用

前節と同様に考えれば，$(1+x)^r$ の形でない一般の関数 $f(x)$ についても，“よい性質” をもち x のベキで展開できるならば，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

と表せる．ここで，$f^{(k)}(0)$ は $f(x)$ を k 回微分して $x=0$ としたときの値である．

例 6

$f(x) = \sin x$ はベキ展開可能である．$f^{(k)}(x)$ を計算すると，

$$f(x) = \sin x,\ \ f'(x) = \cos x,\ \ f''(x) = -\sin x,\ \ f'''(x) = -\cos x,\ \ f^{(4)}(x) = \sin x,\ \ \cdots$$

より，$f^{(k)}(0)$ は，

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad \cdots$$

となる．したがって，

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$