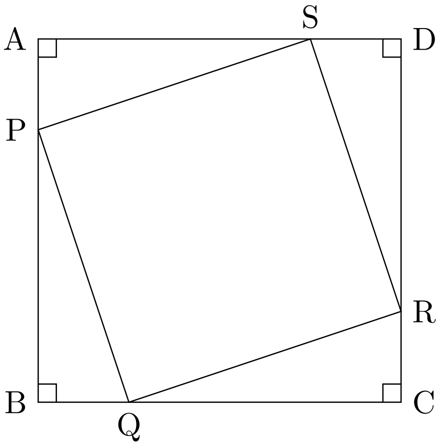
## 問題




左図のように, 正方形ABCDの辺AB, BC, CD, およびDA上に, それぞれ点P, Q, R, およびSを, $\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CR}=\mathrm{DS}$となるようにとる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle\mathrm{APS}\equiv\triangle\mathrm{BQP}$を示せ.

(2) $\triangle\mathrm{APS}$と合同な三角形を, $\triangle\mathrm{BQP}$以外に2つ挙げよ.

いま, $\mathrm{AP}=a$, $\mathrm{AS}=b$, $\mathrm{PS}=c$とする.

(3) 正方形ABCD, 四角形PQRS, および$\triangle\mathrm{APS}$の面積を, $a$, $b$, および$c$のうち必要なものを用いて表わせ.

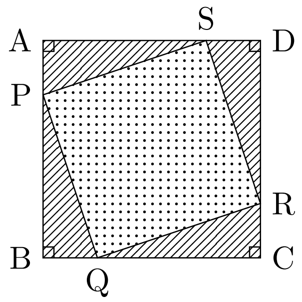
(4) 前問の結果を用いて, $c$を$a$, $b$を用いて表わせ.

## 解答

1. 解説を参照．
2. $\triangle$DSR，$\triangle$CRQ
3. 順に，$(a+b)^2$，$c^2$，$\dfrac{1}{2}ab$
4. $c=\sqrt{a^2+b^2}$

## 解説

1. (証明)
   題意より，
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}&=\mathrm{BQ} &(1)\\ \mathrm{AD}&=\mathrm{BA} &(2)\\ \mathrm{DS}&=\mathrm{AP} &(3)\\ \angle\mathrm{SAP}&=\angle\mathrm{PBQ} &(4)\end{aligned}$$
   (2)，(3) 式より，
$$\mathrm{AS}=\mathrm{AD}-\mathrm{DS}=\mathrm{BA}-\mathrm{AP}=\mathrm{BP}\ (5)$$
   を得る．(1), (4), および (5) 式から, $\triangle$APS と $\triangle$BQP について，2 辺とそれらに挟まれた角がそれぞれ等しいため，
$$\triangle\mathrm{APS}\equiv\triangle\mathrm{BQP}\quad\square$$
2. 図形の対称性による．
3. 合同な図形の対応する辺は長さが等しいことを用いれば, BP $=$ AS $=b$．したがって，正方形 ABCD の一辺の長さは AB $=a+b$ であるから，面積は $(a+b)^2$．
   同様に，PS $=$ SR $=$ RQ $=$ QP $=c$ より，四角形 PQRS は 1 辺 $c$ の正方形であるから，面積は $c^2$．
   $\triangle$APS は，底辺と高さが $a$，$b$ の直角三角形であるから，面積は $\frac{1}{2}ab$.
4. 正方形 ABCD の面積は，下図における斜線部分の面積と，ドット部分の面積との和で表せることを利用する．




   斜線部分の面積は，$\triangle$APS の面積 4 個分であるから，$4\cdot\frac{1}{2}ab=2ab$．ドット部分の面積は，四角形 PQRS の面積そのものであるから，$c^2$．したがって，次式が成り立つ．
$$(a+b)^2=2ab+c^2$$
   この式を展開，整理すると，
$$c^2=a^2+b^2$$
   $c>0$ であるから，
$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

## 補足

問の結果からも分かるとおり，一般に，直角三角形の 3 辺の長さについて，以下の等式が成り立つ．

**三平方の定理**

斜辺の長さを $c$，他の 2 辺の長さを $a$，$b$ とすると，
$$c^2=a^2+b^2$$

辺の長さがすべて正であることを用いて変形すれば，任意の 2 辺の長さから，残りの 1 辺の長さを求めることができる．
$$\begin{aligned}a&=\sqrt{c^2-b^2}\\ b&=\sqrt{c^2-a^2}\\ c&=\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$