1 不定積分

1.1 オイラーの公式

次のような不定積分を考えましょう．

例題 1

(a) $I = \int e^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x$　　(b) $J = \int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x$

▶ 教科書的な解法 (部分積分を 2 回)

部分積分を 2 回用いて解きます．(a) について，

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \sin(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I \right)
\end{aligned}
$$

となるので，I について解けば，

$$
I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C
$$

を得ます．(b) も同様にして，

$$
J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C
$$

と求まります．

▶ 教科書的な解法 (連立方程式)

部分積分を用い，2 つを同時に計算します．

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} J
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \sin(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I
\end{aligned}
$$

整理すると，以下の連立方程式を得ます．

$$
\begin{cases}
aI - bJ = e^{ax} \cos(bx) \\
bI + aJ = e^{ax} \sin(bx)
\end{cases}
$$

これを解くと，求める不定積分は，

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))+C \\ J &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+C \end{aligned}$$

となります．

どちらにせよ面倒な計算であることがわかります．この計算は，以下の**オイラーの公式**を用いると比較的簡単に計算できます．

定義 1.I: オイラーの公式

実数 θ に対して，複素数 $e^{i\theta}$ を次のように定義します．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

▶ この定義の正当化

この定義は，指数法則やド・モアブルの定理と一貫しています．つまり，2 つの複素数

$$e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \quad e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

の積を考えたとき，左辺の積は指数法則により，

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

となり，右辺の積はド・モアブルの定理により，

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となりますが，これらは最初の定義で $\theta = \theta_1 + \theta_2$ とおくことで，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となることと整合的です．

また，微分操作とも整合的です．$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を θ で微分すると，左辺の微分は指数関数の微分法則により，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

となり，オイラーの公式を用いれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}e^{i\theta} = i(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$$

と表されますが，これは右辺の微分が三角関数の微分法則により，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$$

と直接計算されることと一貫性があります．

▶ オイラーの公式を用いた解法

実際に，オイラーの公式を用いて先ほどの不定積分を計算してみましょう．複素数 z の実部を $\mathrm{Re}[z]$，虚部を $\mathrm{Im}[z]$ と表記することにすると，オイラーの公式により，

$$\mathrm{Re}[e^{ibx}] = \cos(bx), \quad \mathrm{Im}[e^{ibx}] = \sin(bx)$$

です．積分操作では実部と虚部を個別に計算することから，実部・虚部を取る操作と積分操作は交換可能です．したがって，

$$I = \int e^{ax}\,\mathrm{Re}[e^{ibx}]\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\int e^{ax}e^{ibx}\,\mathrm{d}x\right] = \mathrm{Re}\left[\int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x\right]$$

と表せます．指数関数の積分法則を用いれば，

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right] + C \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{a+ib}e^{ax}e^{ibx}\right] + C \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))\right] + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C
\end{aligned}$$

と，機械的に計算することができます．

1.2 瞬間部分積分

次のような不定積分を考えましょう．

例題 2

(a) $I = \displaystyle\int x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$　　(b) $J = \displaystyle\int x^3 e^x\,\mathrm{d}x$

このような部分積分を繰り返す積分は，符号などをミスしやすく，計算が面倒です．次のように表を作ると，計算が楽になります．

(1) 積になっている 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ のうち，何回か微分すると 0 になる方 $f(x)$ を選び，$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$ と縦に並べます．
(2) もう一方の関数 $g(x)$ の 1 階積分，2 階積分，3 階積分…を (1) の横に並べます．
(3) 各行に上から順に $+$, $-$, $+$, $\cdots$ と符号をつけ，各行の積を足し上げます．

符号	微分する関数	積分する関数
$+$	$f(x)$	$g(x)$ の 1 階積分
$-$	$f'(x)$	$g(x)$ の 2 階積分
$+$	$f''(x)$	$g(x)$ の 3 階積分
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

実際に瞬間部分積分を用いて計算してみましょう.

(a) 瞬間部分積分をするための表は以下のようになります.

符号	微分する関数	積分する関数
$+$	x^2	$\frac{1}{2}\sin(2x)$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos(2x)$
$+$	2	$-\frac{1}{8}\sin(2x)$

あとは各行の積を足し上げれば,

$$I = \frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

と求まります.

(b) 同様に表は以下のようになります.

符号	微分する関数	積分する関数
$+$	x^3	e^x
$-$	$3x^2$	e^x
$+$	$6x$	e^x
$-$	6	e^x

したがって，求める不定積分は,

$$J = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$$

となります.

1.3 ヘビサイドのカバーアップ法

有理関数の積分を計算するときには，部分分数分解が有効です．部分分数分解の係数を求めるのに便利なのが，**ヘビサイドのカバーアップ法**です.

まず，一般論として，次のことが成り立ちます.

定理 1.1: 部分分数分解

有理関数 $P(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ について，$N(x)$ と $D(x)$ が互いに素であり，かつ $D(x)$ の次数が $N(x)$ の次数より大きいとします．

$$D(x)=(x-p_1)^{n_1}(x-p_2)^{n_2}\cdots(x-p_k)^{n_k}$$

と因数分解できるとき，

$$P(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{C_{i,j}}{(x-p_i)^j}$$

と部分分数分解できます．

例えば，$P(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$ なら，

$$P(x)=\frac{C_{1,1}}{x-1}+\frac{C_{1,2}}{(x-1)^2}+\frac{C_{2,1}}{x-2}+\frac{C_{2,2}}{(x-2)^2}+\frac{C_{2,3}}{(x-2)^3}$$

を満たす $C_{i,j}$ が存在するということです．

▶ 分母多項式が重根をもたない場合

簡単のために，まず分母多項式 $D(x)$ が重根をもたない場合を考えます．簡潔さのために $C_{i,1}=A_i$ と書くと，このとき，

$$\frac{N(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_k)}=\frac{A_1}{x-p_1}+\frac{A_2}{x-p_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-p_k}$$

の両辺に $x-p_1$ をかけ，更に $x=p_1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{N(p_1)}{(p_1-p_2)\cdots(p_1-p_k)}\\(\text{右辺})&=A_1+\frac{A_1}{p_2-p_1}(p_1-p_1)+\cdots+\frac{A_k}{p_k-p_1}(p_1-p_1)=A_1\end{aligned}$$

となります．同様の操作を行うと，$A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_k$ も求まります．つまり，

定理 1.2: ヘビサイドのカバーアップ法

有理関数 $P(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ について，$D(x)$ が重根をもたないとき，

$$P(x)=\frac{A_1}{x-p_1}+\frac{A_2}{x-p_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-p_k}$$

と部分分数分解でき，係数 A_i は，

(1) $P(x)$ の分母から $(x-p_i)$ を払い，
(2) $x=p_i$ を代入する．

ことによって求められる．

実際に計算してみましょう．

例題 3

部分分数に分解せよ．

(a) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (b) $\dfrac{2x+3}{(x-1)(x-2)}$

(a) 与えられた式は，

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}$$

と部分分数分解できるので，ヘビサイドのカバーアップ法により，

$$\begin{aligned}
A_1 &: \quad \frac{1}{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)} \xrightarrow{x=1\text{ を代入}} \frac{1}{2}\\
A_2 &: \quad \frac{1}{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-3)} \xrightarrow{x=2\text{ を代入}} -1\\
A_3 &: \quad \frac{1}{(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)}} \xrightarrow{x=3\text{ を代入}} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

より，

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2(x-3)}$$

と求まります．

(b) 与えられた式は，

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}$$

と部分分数分解できるので，同様に，

$$\begin{aligned}
A_1 &: \quad \frac{2x+3}{\cancel{(x-1)}(x-2)} \xrightarrow{x=1\text{ を代入}} -5\\
A_2 &: \quad \frac{2x+3}{(x-1)\cancel{(x-2)}} \xrightarrow{x=2\text{ を代入}} 7
\end{aligned}$$

より，

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} = -\frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

と求まります．

▶ 分母多項式が重根をもつ場合

分母多項式 $D(x)$ が重根をもつ場合は，多少面倒な操作が必要になります．$D(x)$ が $x = p_i$ を n 重根としてもつとき，$x = p_i$ を根としてもつ項に注目すれば，$P(x)$ の部分分数分解は，

$$P(x) = \frac{B_1}{x-p_i} + \frac{B_2}{(x-p_i)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-p_i)^n} + (\text{その他の項})$$

と表せます (ただし，$C_{i,j} = B_j$ と書きました)．B_n を求めるのは先ほどと同じアイデアで，両辺に $(x-p_i)^n$ をかけて $x = p_i$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}(x-p_i)^n P(x) &= B_1(x-p_i)^{n-1} + B_2(x-p_i)^{n-2} + \cdots + B_{n-1}(x-p_i) + B_n \\ &\xrightarrow{x = p_i\ \text{を代入}} B_n\end{aligned}$$

となるので求まります．では，B_{n-1} を求めるにはどうしたらよいでしょうか？

そこで，$(x-p_i)^{n-1}$ をかけただけの状態の右辺

$$B_1(x-p_i)^{n-1} + B_2(x-p_i)^{n-2} + \cdots + B_{n-1}(x-p_i) + B_n$$

に注目すると，求めるのはこの式において $(x-p_i)$ の 1 次の係数です．この式を x で 1 度微分すると，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{B_1(x-p_i)^{n-1} + B_2(x-p_i)^{n-2} + \cdots + B_{n-1}(x-p_i) + B_n\right\} \\ &= (n-1)B_1(x-p_i)^{n-2} + (n-2)B_2(x-p_i)^{n-3} + \cdots + B_{n-1}\end{aligned}$$

となります．そのうえで $x = p_i$ を代入すると，

$$\cancel{(n-1)B_1(p_i-p_i)^{n-2}} + \cancel{(n-2)B_2(p_i-p_i)^{n-3}} + \cdots + B_{n-1} = B_{n-1}$$

として，B_{n-1} が求まります．$B_{n-2}, \cdots, B_1$ も同様にして求まりますが，微分するごとに $(x-p_i)$ の右肩の数字が係数として現れることに注意しなければなりません．つまり，B_j を求めるには $B_j(x-p_i)^{n-j}$ を $n-j$ 回微分することになりますが，そのときに余分な係数 $(n-j)!$ が出てきてしまうので，結果をこれで割る必要があります．まとめると，次のようになります．

定理 1.3: ヘビサイドのカバーアップ法 (重根)

有理関数 $P(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ について，$D(x)$ が $x = p_i$ を n 重根としてもつとき，

$$P(x) = \frac{B_1}{x-p_i} + \frac{B_2}{(x-p_i)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-p_i)^n} + (\text{その他の項})$$

と部分分数分解でき，係数 B_j は，

(1) $P(x)$ の分母から $(x-p_i)^j$ を払い，
(2) x で $n-j$ 回微分して，
(3) $(n-j)!$ で割り，
(4) $x = p_i$ を代入する．

ことで求まります．

実際に計算してみましょう．

例題 4

部分分数に分解せよ．

(a) $\dfrac{1}{(x-1)^3(x-2)}$ (b) $\dfrac{2x+1}{x^2(x-1)}$

(a) 与えられた式は，

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{C_{1,1}}{x-1} + \frac{C_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(x-1)^3} + \frac{C_{2,1}}{x-2}$$

と部分分数分解できます．$C_{1,3}$，$C_{2,1}$ の計算は簡単で，

$$C_{1,3}: \quad \frac{1}{\cancel{(x-1)^3}(x-2)} \xrightarrow{x=1\text{ を代入}} -1$$
$$C_{2,1}: \quad \frac{1}{(x-1)^3\cancel{(x-2)}} \xrightarrow{x=2\text{ を代入}} 1$$

$C_{1,2}$ の計算は，分母から $(x-1)^3$ を払ったものを 1 度微分して，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{\cancel{(x-1)^2}(x-2)}\right\} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

さらに 1 度目の微分なので $1! = 1$ で割り，$x = 1$ を代入すれば，

$$C_{1,2} = -\frac{1}{(1-2)^2} = -1$$

と求まります．次に，$C_{1,1}$ の計算は，分母から $(x-1)^3$ を払ったものを 2 度微分して，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left\{\frac{1}{\cancel{(x-1)^3}(x-2)}\right\} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

さらに 2 度目の微分なので $2! = 2$ で割り，$x = 1$ を代入すれば，

$$C_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-2)^3} = -1$$

よって，求める部分分数分解は，

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-2}$$

となります．

(b) 与えられた式は，

$$\frac{2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{C_{0,1}}{x} + \frac{C_{0,2}}{x^2} + \frac{C_{1,1}}{x-1}$$

と部分分数分解できます．同様に計算すれば，

$$\begin{aligned} C_{0,2} &: \frac{2x+1}{\cancel{x^2}(x-1)} \xrightarrow{x=0\text{ を代入}} -1 \\ C_{1,1} &: \frac{2x+1}{x^2\cancel{(x-1)}} \xrightarrow{x=1\text{ を代入}} \quad 3 \end{aligned}$$

$C_{0,1}$ の計算は，分母から x^2 を払ったものを 1 度微分し，$1! = 1$ で割ってから $x = 0$ を代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{2x+1}{\cancel{x^2}(x-1)}\right\} = \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=0\text{ を代入}} -3$$

より，求める部分分数分解は，

$$\frac{2x+1}{x^2(x-1)} = -\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

となります．

2 定積分

2.1 ウォリスの積分公式

定理 2.1: ウォリスの積分公式

sin, cos の n 乗の $[0, \pi/2]$ における定積分について以下の等式が成り立ちます.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

Proof. 面倒なので割愛. □