設問: p.1–p.2，解答: p.3–p.4

特に断りのない場合，以下の設問では因数分解は係数が有理数となる範囲で考える．

問 1 因数分解せよ:

(a) $x^2-10x-24$

(b) $6x^2-17x-45$

(c) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a+2abc$

(d) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$

(e) $x^2-y^2-6x+14y-40$

(f) x^4-x^2-12 （ヒント: $x^4=\left(x^2\right)^2$ ）

問 2 Alice と Bob は x^4+4 の因数分解について考えている．

Alice: とりあえず $x^2=A$ と置き換えて， $x^4+4=A^2+4$ としてみたけれど，この先が続かないわね．

Bob: そうだね．じゃあ等式が保たれるように A の項を付け加えて，

$$A^2+4=A^2+\boxed{}+4-\boxed{}$$

と変形してみるのはどうかな．

Alice: なるほど．そうすれば前の 3 つの項で「2 項の和の 2 乗を展開したときの形」がつくれるのね．その後はどうするのかしら．

Bob: 置き換えた A を戻してみれば分かるはずだよ．あまり人に聞いてばかりいないで実際に手を動かしてみたほうがいいんじゃないかな．

(a) 会話文中の $\boxed{}$ を埋めるのに適当な A の項を書け(2 つの空欄には同じものが入る)．

(b) x^2+4 を因数分解せよ．

問 3 以下に示す 2 つの数 p,q の大小を判定せよ．答えに至った過程も記せ．

$$p=\frac{1}{100}\times\frac{2}{100}\times\cdots\times\frac{98}{100}\times\frac{99}{100},\quad q=2\times 0.25^{50}$$

問 4 次の等式を満たす整数 a,b の組をそれぞれすべて求めよ．

(a) $ab=4$

(b) $(a+2)(b+1)=3$

(c) $ab+5a+3b+2=0$

(d) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+1=0$

問 5 $a+b=-5,\ ab=2,\ a>b$ のとき，次の値を求めよ．

(a) $(a+1)(b+1)$

(b) a^2+b^2

(c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(d) $a-b$

問 6 x の式 $P(x)$ を因数分解した結果，因数に x の式 $Q(x)$ が含まれることを，「$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れる」と表現することにする．例えば，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ が成り立つので，「x^2+3x+2 は $x+1$ で割り切れる」，「x^2+3x+2 は $x+2$ で割り切れる」といえる．

(a) x^2-1 が $x-1$ で割り切れることを示せ．

(b) x^3-1 が $x-1$ で割り切れることを示せ．

(c) n を自然数とするとき，x^n-1 は $x-1$ で割り切れるか．もし割り切れるのなら $x-1$ を因数にもつ因数分解を具体的に示し，割り切れないのならその理由を述べよ．

解答

問 1

(a) $(x+2)(x-12)$　　(b) $(3x+5)(2x-9)$

(c) $(a+b)(b+c)(c+a)$　　(d) $(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$

(e) $(x-y+4)(x+y-10)$　　(f) $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

問 2 (a) $4A$

(b) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

問 3 $p<q$

問 4 (a) $(a,b)=(1,4),(2,2),(4,1),(-1,-4),(-2,-2),(-4,-1)$

(b) $(a,b)=(-1,2),(1,0),(-3,-4),(-5,-2)$

(c) $(a,b)=(-2,8),(10,-4),(-4,-18),(-16,6)$

(d) $(a,b)=(-1,1),(-3,-3),(-4,-2)$

問 5 (a) -2　　(b) 21　　(c) $-5/2$　　(d) $\sqrt{17}$

問 6 (a) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ による．

(b) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ による．

(c) 割り切れる． $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ と因数分解できる．

解説

問 1 (c) 注目する文字を 1 つに決めて(以下では a について)整理する．

$$\begin{aligned}
&a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a+2abc\\
&=(b+c)a^2+\left(b^2+2bc+c^2\right)a+bc^2+b^2c\\
&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\
&=(b+c)\left(a^2+(b+c)a+bc\right)\\
&=(b+c)(a+b)(a+c)\\
&=(a+b)(b+c)(c+a)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
(x^2-1)(y^2-1)-4xy&=x^2y^2-x^2-y^2+1-4xy && \text{(並び替え)}\\
&=x^2y^2-2xy+1-x^2-2xy-y^2 && (-4xy=-2xy-2xy\ \text{と分解})\\
&=(x^2y^2-2xy+1)-(x^2+2xy+y^2)\\
&=(xy-1)^2-(x+y)^2\\
&=(xy+x+y-1)(xy-x-y-1) && \text{(和と差の積)}
\end{aligned}$$

(e) クロスターム(x, y がどちらも含まれる項)がないことに注目し, x と y のそれぞれについての因数分解を試みる.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x + 14y - 40 &= x^2 - 6x + 9 - y^2 + 14y - 49 \\ &= (x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 14y + 49) \\ &= (x+3)^2 - (y-7)^2 \\ &= (x+y-4)(x-y+10) \end{aligned}$$

問 2 (b) $x^2 = A$ と置き換えれば,

$$x^4 + 4 = A^2 + 4 = A^2 + 4A + 4 - 4A = (A+2)^2 - 4A$$

となる. 置き換えをもとに戻して,

$$x^4 + 4 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2+2\right)^2 - (2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

問 3 分数の中に $50/100 = 0.5 = 2 \times 0.25$ があることに注目する. $n = 1, 2, \cdots, 49$ について,

$$\frac{50-n}{100} \times \frac{50+n}{100} = \frac{(50-n)(50+n)}{10000} = \frac{2500-n^2}{10000} < \frac{2500}{10000} = 0.25$$

と評価できるので,

$$\begin{aligned} p &= \underbrace{\left(\frac{1}{100} \times \frac{99}{100}\right) \times \left(\frac{2}{100} \times \frac{98}{100}\right) \times \cdots \times \left(\frac{49}{100} \times \frac{51}{100}\right)}_{49\text{個}} \times \frac{50}{100} \\ &< 0.25 \times 0.25 \times \cdots \times 0.25 \times (2 \times 0.25) \\ &= 0.25^{49} \times 2 \times 0.25 \\ &= 2 \times 0.25^{50} \\ &= q \end{aligned}$$

問 4 (b) $(a+2, b+1) = (1,3), (3,1), (-1,-3), (-3,-1)$ による.

(c) $ab + 5a + 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(b+5) = 13$ より,

$$(a+3, b+5) = (1,13), (13,1), (-1,-13), (-13,-1)$$

となる.

(d) 与式の両辺に ab をかけると, $ab + a + 2b = 0 \Leftrightarrow (a+2)(b+1) = 2$ を得るので,

$$(a+2, b+1) = (1,2), (2,1), (-1,-2), (-2,-1)$$

と列挙できる. ただし, $(a+2, b+1) = (2,1)$ のとき $a = b = 0$ となるため適さない.

問 5 (a) $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$ による.

(b) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ による.

(c) $1/a + 1/b = (a+b)/(ab)$ による.

(d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab = 17$ より, $a > b$ に注意すれば従う.