設問: p1–p2，解答用紙: p3–p4，解答: p5

問 1 (a) 展開せよ:

(i) $(2a+b)(3a+2b)$

(ii) $(x+y)^2(x-y)^2$

(iii) $(3a+3b-2)(a-6b+4)$

(iv) $(2s^2t-st^2)\left(s-\dfrac{1}{2}t\right)$

(v) $(a+b-c-d)(a+b+c+d)$

(vi) $(x-2)(x^2+2x+4)$

(vii) $\left(2p+\dfrac{1}{p}\right)^2$

(viii) $(2x+y+3)^2$

(b) 展開公式

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

を導け．ただし，積の分配法則

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC$$

を既知としてよい．

(c) 展開公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ を導け．

問 2 (a) 次の式を展開せよ．ただし，x の次数が低い順に項を並べて解答せよ．

$$(x+y)^3,\ (x+y)^4,\ (x+y)^5$$

(b) $(x+1)^{10}$ を展開したときの，定数項，x の係数，および x^2 の係数はそれぞれ何か．
(ヒント: $\underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{10\text{個}}$ を展開すると考えよ．)

(c) $(x+1)^n$ を展開したときの，定数項，x の係数，および x^2 の係数を n を用いて表せ．また，x^k の係数を n, k を用いて表せ．

以下に示すような，整数を三角形状に並べたものについて考える．これは**パスカルの三角形** (Pascal's triangle)とよばれる．配置される数字は，次の規則に従って定められる．

> (i) n 段目には n 個の数字を配置する．
> (ii) 最上段には 1 を配置する．
> (iii) 2 段目以降には，両端に 1 を配置し，上段の数字の間に挟まる場所には右上の数と左上の数の和を配置する．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

図 1: パスカルの三角形

(d) 上記の規則に従い，パスカルの三角形の 6 段目を記せ．

(e) (a)で展開した式で $y=1$ とすれば，$(x+1)^3,\ (x+1)^4,\ (x+1)^5$ の展開式が得られる．パスカルの三角形の $n+1$ 段目と，$(x+1)^n$ を展開し(て x の次数が小さい順に並べ)たときの係数が一致することを，$n=2,3,4,5$ の場合について実際に確かめよ．この関係は，一般の n について成立するが，その理由を説明せよ(数学的に厳密な証明を与える必要はない)．

(f) 展開せよ: $(x-2)^4,\ (2x+1)^3$

問 3 以下の設問では，複数の解答があり得る場合でも，そのうちの 1 つを書けばよい．

(a) $(x+a)(x+b)$ を展開すると，x^2+5x+6 となった．a, b の値は何か．

(b) $(x+a)(x+b)$ を展開すると，x^2-144 となった．a, b の値は何か．

(c) $(ax+b)(cx+d)$ を展開すると，$2x^2+7x+3$ となった．a, b, c, d の値は何か．

(d) $(ax+b)(cx+d)$ を展開すると，$4x^2-4x-15$ となった．a, b, c, d の値は何か．

問 1

(a)	(i)	(ii)
	(iii)	(iv)
	(v)	(vi)
	(vii)	(viii)
(b)		
(c)		

問 2

(a)	$(x+y)^3 =$		
	$(x+y)^4 =$		
	$(x+y)^5 =$		
(b)	定数項:	x :	x^2 :

(c)	定数項:	x :	x^2 :	x^k :
(d)				
(e)				
(f)	$(x-2)^4 =$			
	$(2x+1)^3 =$			

問 3

(a)	$a =$		$b =$	
(b)	$a =$		$b =$	
(c)	$a =$	$b =$	$c =$	$d =$
(d)	$a =$	$b =$	$c =$	$d =$

解答

問 1 (a) $6a^2+7ab+2b^2$ $\quad$ $x^4-2x^2y^2+y^4$

$3a^2-21ab+18b^2+10a-8$ $\quad$ $2s^3t-2s^2t^2+\dfrac{1}{2}st^3$

$a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$ $\quad$ x^3-8

$4p^2+4+\dfrac{1}{p^2}$ $\quad$ $4x^2+4xy+y^2+12x+6y+9$

(b) $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(c) (b)で $a=c=x,\ b=a,\ d=b$ とすれば直ちに従う．

問 2 (a) $(x+y)^3=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3$

$(x+y)^4=y^4+4xy^3+6y^3x^2+4x^3y+x^4$

$(x+y)^5=y^5+5xy^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y+x^5$

(b) 定数項: 1， x の係数: 10， x^2 の係数: ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(c) 定数項: 1， x の係数: n， x^2 の係数: ${}_n\mathrm{C}_2=n(n+1)/2$， x^k の係数: ${}_n\mathrm{C}_k$

(d) 左から $1,5,10,10,5,1$.

(e) $(x+1)^{n-1}$ が，パスカルの三角形の n 段目，左から k 番目の数字 a_k を使って

$$(x+1)^{n-1}=a_1+a_2x+\cdots+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}$$

と書けているとする． $(x+1)^n=(x+1)(x+1)^{n-1}$ とみて展開したときの x^k の項は，

$$x\cdot\left(a_{k-2}x^{k-1}\right)+1\cdot\left(a_{k-1}x^k\right)=(a_{k-2}+a_{k-1})x^k$$

となる． $(x+1)^n$ の x^k の係数が $a_{k-2}+a_{k-1}$ となることは，パスカルの三角形で $n+1$ 段目，左から k 番目の数字を， n 段目，左から $k-2$ 番目と $k-1$ 番目の数(=1 段上の両隣の数)を足してつくることに対応しており，したがって $n+1$ 段目，左から k 番目の数字は x^k の展開係数と一致する．さらに， $(x+1)^1=x+1$ の係数が 2 段目と一致することから，すべての n について $(x+1)^n$ の展開係数と $n+1$ 段目が一致することが示される．

(f) $(x-2)^4=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$

問 3 (a) $a=2,\ b=3$

(b) $a=12,\ b=-12$

(c) $a=2,\ b=1,\ c=1,\ d=3$

(d) $a=2,\ b=3,\ c=2,\ d=-5$