実数 $a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2$ に対して成り立つ次の不等式 (コーシー・シュワルツの不等式; Cauchy – Schwarz inequality) を，以下の手順で示そう．

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right) \tag{1}$$

i) n 次元数ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と任意の実数 λ に対して，$\vec{c}$ を

$$\vec{c} := \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

と定める．このとき

$$|\vec{a}|^2 + 2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda^2|\vec{b}|^2 \geq 0 \tag{2}$$

が成り立つことを示せ (ヒント: $|\vec{c}|^2 \geq 0$ が成り立つことを用いよ)．

ii) (2) 式の左辺を λ についての 2 次式だとみて $f(\lambda)$ と書くと，(2) 式は $f(\lambda) \geq 0$ と表せる．任意の実数 λ に対して $f(\lambda) \geq 0$ が成り立つための条件を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ．

iii) $n = 2$ とする．実数 $a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2$ を用いて，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を

$$\vec{a} = (a_1,\, a_2), \quad \vec{b} = (b_1,\, b_2)$$

と陽に表すことによって，(1) 式が成り立つことを示せ．等号が成立するのはどのような場合か．

i) ただ計算すればよい．

$$0 \leq |\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \lambda\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda^2|\vec{b}|^2$$

より従う．

ii) $f(\lambda) = |\vec{b}|^2\lambda^2 + (2\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda + |\vec{a}|^2$ であるから，$f(\lambda) \geq 0$ が常に成り立つことは，放物線 $y = f(\lambda)$ が λ 軸と高々 1 つの共有点をもつこと，すなわち λ についての 2 次方程式 $f(\lambda) = 0$ の判別式 D に対して $D \leq 0$ が成り立つことと同値である．これを $\vec{a}, \vec{b}$ で表して，

$$D = (2\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 4|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2 = 4(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 4|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \leq 0$$

整理して，

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

を得る．

iii) 問題文に従って $\vec{a}, \vec{b}$ を表すと，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2, \quad |\vec{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2, \quad |\vec{b}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$$

と書けるので，これを ii) で得た結果に代入すれば，コーシー・シュワルツの不等式を得る．
等号が成立するのは $D = 0$，すなわち $f(\lambda') = |\vec{c}|^2 = 0$ となる実数 λ' が存在するときである．これは $\vec{c} = \vec{a} + \lambda'\vec{b} = 0$，すなわち $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が線形従属であることと同値なので，(1) 式の等号は 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が線形従属である場合，かつその場合に限り成立する．