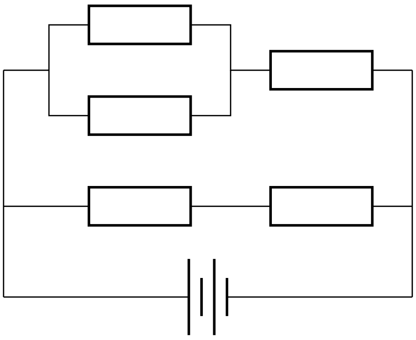
0　はじめに



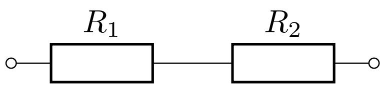
5 つの抵抗が左図に示すように接続された回路があったとする．それぞれの抵抗の抵抗値と，電池の起電力は分かっているものとして，回路全体に流れる電流を求めたいとき，どのようにすればよいだろうか．

5 つの抵抗のそれぞれについて，オームの法則を用いて流れる電流を求め，それらを後で足し上げて全体の電流を出すのでは，計算が煩雑になってしまう．代わりに，先に抵抗だけ「足し上げ」てしまい，抵抗が 1 つだけの回路として見ることができれば，オームの法則を 1 回用いるだけで，全体に流れる電流を求めることができるだろう．この「抵抗の足し上げ」こそが，合成抵抗の考え方である．以降では，オームの法則や，キルヒホッフの法則など，電気回路における基本的な法則をもとに，複数の抵抗の接続について，その合成抵抗の求め方と，簡単な証明を紹介する．

1　抵抗が 2 つの場合

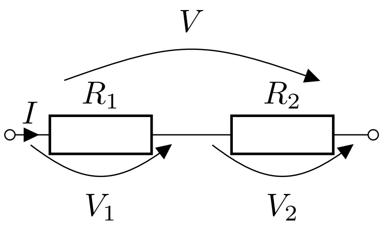
1.1　直列

直列 2 抵抗の合成抵抗



上図のように抵抗値がそれぞれ R_1，R_2 である 2 つの抵抗を直列に接続した場合，その合成抵抗 R_c は，以下で与えられる．

$$R_c = R_1 + R_2$$



上図のように，抵抗 R_1，R_2 にかかる電圧をそれぞれ V_1，V_2，全体の電流と電圧をそれぞれ I，V とすると，それぞれの抵抗について，オームの法則から，

$$V_1 = R_1 I, \quad V_2 = R_2 I \tag{1.1}$$

また，接続全体にかかる電圧は，それぞれの抵抗にかかる抵抗の和であるから，

$$V = V_1 + V_2 \tag{1.2}$$

(1.1) と (1.2) から，次の式を得る．

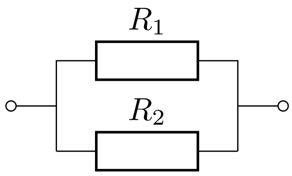
$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

オームの法則の式 $V = RI$ と比較すると，接続全体の抵抗について，

$$R_c = R_1 + R_2$$

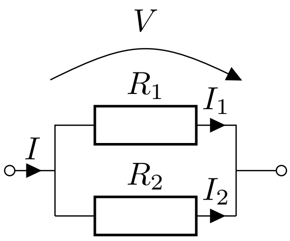
1.2　並列

並列 2 抵抗の合成抵抗



上図のように抵抗値がそれぞれ R_1，R_2 である 2 つの抵抗を並列に接続した場合，その合成抵抗 R_c は，以下で与えられる．

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



上図のように，抵抗 R_1，R_2 に流れる電流をそれぞれ I_1，I_2，全体の電流と電圧をそれぞれ I，V とすると，それぞれの抵抗について，オームの法則から，

$$V = R_1 I_1, \quad V = R_2 I_2$$

これを変形して，

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2} \tag{1.3}$$

を得る．一方，キルヒホッフの第 1 法則[*1]より，

$$I = I_1 + I_2 \tag{1.4}$$

(1.3) と (1.4) から，次の式を得る．

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V$$

[*1] 回路中のどの分岐点についても，そこに流れ込む電流の総和と，流れ出す電流の総和は等しい．

変形すると，

$$V = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

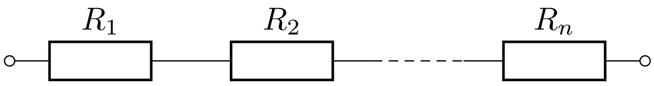
オームの法則の式 $V = RI$ と比較すると，接続全体の抵抗について，

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2　抵抗が n 個の場合

2.1　直列

直列 n 抵抗の合成抵抗



上図のように抵抗値がそれぞれ R_1，R_2，...，R_n である n 個の抵抗を直列に接続した場合，その合成抵抗 R_c は，以下で与えられる．

$$R_c = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

証明の流れは 2 抵抗のときと同様．
抵抗 R_i にかかる電圧を V_i [*2]，全体の電流と電圧をそれぞれ I，V とすると，抵抗 R_i について，オームの法則から，

$$V_i = R_i I \tag{2.1}$$

また，接続全体に掛かる電圧は，それぞれの抵抗にかかる抵抗の和であるから，

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \tag{2.2}$$

(2.1) と (2.2) から，次の式を得る．

$$V = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I = (R_1 + R_2 + \cdots R_n) I$$

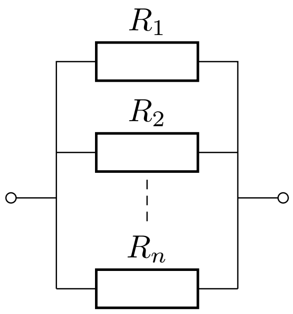
オームの法則の式 $V = RI$ と比較すると，接続全体の抵抗について，

$$R_c = R_1 + R_2 + \cdots R_n$$

[*2] 単に，抵抗 R_1 の電圧を V_1，抵抗 R_2 の電圧を V_2，... (以下同様) としているだけである．

2.2 並列

並列 n 抵抗の合成抵抗



上図のように抵抗値がそれぞれ R_1，R_2，...，R_n である n 個の抵抗を並列に接続した場合，その合成抵抗 R_c と，R_1，R_2，$\cdots$，R_n との関係は，以下で与えられる．

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

並列の場合も，証明の流れは 2 抵抗のときと同様.

抵抗 R_i に流れる電流を I_i，全体の電流と電圧をそれぞれ I，V とすると，それぞれの抵抗について，オームの法則から，

$$V = R_i I_i$$

これを変形して，

$$I_i = \frac{V}{R_i} \tag{2.3}$$

を得る．一方，キルヒホッフの第 1 法則より，

$$I = I_1 + I_2 + \cdots I_n \tag{2.4}$$

(2.3) と (2.4) から，次の式を得る．

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \cdots + \frac{V}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)V$$

変形すると，

$$V = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} I$$

オームの法則の式 $V = RI$ と比較すると，接続全体の抵抗について，

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$