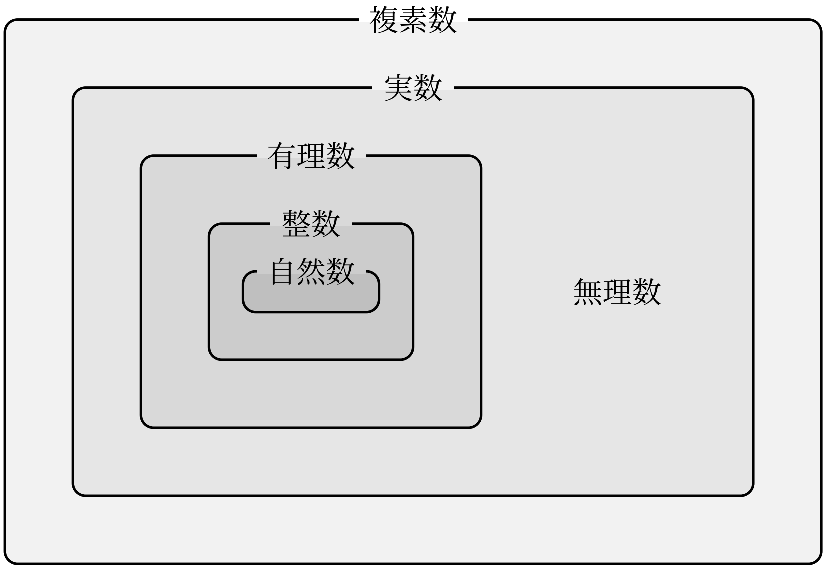
数の集合



自然数 (natural number)，すなわちモノの個数に対応する数の集まりを知っていることにすると(ざっくりと)，

整数 (integer)	自然数 n, m に対し，$n-m$ の値，すなわち $n = m+k$ を満たす k を集めたもの．
有理数 (rational number)	整数 k, ℓ に対し，k/ℓ の値，すなわち $k = q\ell$ を満たす q を集めたもの．
実数 (real number)	有理数上のコーシー列 (Cauchy sequence)[*1]の収束先を集めたもの．
複素数 (complex number)	$i^2 = -1$ を満たす i (虚数単位)，および 2 つの実数 a, b を用いて，$a+bi$ と表される数を集めたもの．

のように，徐々に数の範囲を広げていくことができます．このようにして作った数の集まりのことを，数の**集合** (set) とよびます．よく使う数の集合には，記号が定められています．

自然数	整数	有理数	実数	複素数
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

数の“個数”

それぞれの数の集合に含まれる数の個数について考えてみます．集合に含まれる数の個数が有限個である場合，それらの個数を比較することは容易ですが，自然数，整数，有理数，…はそれぞれ無限に存在するため，比較するためにはちょっとした工夫が必要です．

[*1] ざっくりといえば，先に進むにつれて隣り合う数字の差が小さくなっていく数列のこと．例えば，$\sqrt{2}$ の小数第 n 位までの数を n 番目の数とする数列 1.4, 1.41, 1.414, $\cdots$ は有理数上の Cauchy 列だが，無理数 $\sqrt{2}$ に収束する．

Copyright © 2025 Boda

2 つの集合の要素が有限個である場合，それらの要素の個数が等しければ，2 つの集合の要素を 1 対 1 に対応させることができます．逆に，集合の要素を 1 対 1 に対応させられるとき，それらの集合の要素の個数は等しいといえます (図 1)．これを無限の要素数をもつ集合に対しても適用することで，要素数が無限であっても，その要素数を比較することができます．このようにして集合の要素数を考えるときには,「個数」の代わりに**濃度** (cardinality) という言葉を用い，記号 Card を用います．例えば，自然数の濃度は $\mathrm{Card}\,\mathbb{N}$ です．まとめると，次のようになります．

定義 I: 濃度

無限の要素数をもつ 2 つの集合の濃度が等しいとは,「2 つの集合の要素の間に 1 対 1 の対応関係を作ることができる」ことである．

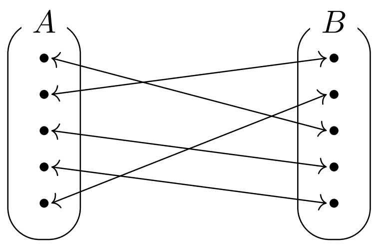


図 1　集合 A, B の要素を 1 対 1 に対応させるイメージ．

このような濃度の考え方を用いると，以下のことが成り立ちます．

命題 i: 数の集合の濃度

1) 自然数の濃度は整数の濃度と等しい．
2) 自然数の濃度は有理数の濃度と等しい．
3) 自然数の濃度は実数の濃度より小さい．

順番に示していきましょう．

1) 自然数と整数の間に，以下のような 1 対 1 の対応関係を作ることができます．

自然数	$\cdots$	9	7	5	3	1	2	4	6	8	$\cdots$
整数	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

すなわち，整数 k に対し，

- $k = 0$ ならば，自然数 1 を対応させる．
- $k > 0$ ならば，自然数 $2k$ を対応させる．
- $k < 0$ ならば，自然数 $-2k + 1$ を対応させる．

と定めます．すると，これは自然数と整数の間の 1 対 1 の対応になっていることがわかります．

2) 自然数と有理数の濃度が等しいことを示す前に，自然数 (=正の整数) と<u>正の</u>有理数の濃度が等し

Copyright © 2025 Boda

いことを示します．そのために，まず xy 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも自然数である点を考え，各点に対し，有理数 $\frac{y}{x}$ を割り当てます．ただし，約分して他の有理数と等しくなるような点は除外します (図 2)．すると，正の有理数，すなわち (自然数)/(自然数) で表される数を，すべて座標平面上の点に割り当てることができます．

こうしてできた各点に，図 3 で示すような順番で自然数を対応させます．すると，各点に自然数を必ず 1 つ対応させることができ，したがって正の有理数と自然数を 1 対 1 に対応させられます．全く同様にして，負の整数 $(-1, -2, \cdots)$ と負の有理数を 1 対 1 に対応させることができます．さらに，整数 0 と有理数 0 を対応させる関係を追加すると，整数と有理数全体との 1 対 1 の対応関係を作ることができます．ここで，1) から，整数の濃度と自然数の濃度が等しいことを思い出すと，結局，自然数の濃度と有理数の濃度が等しいことがわかります．

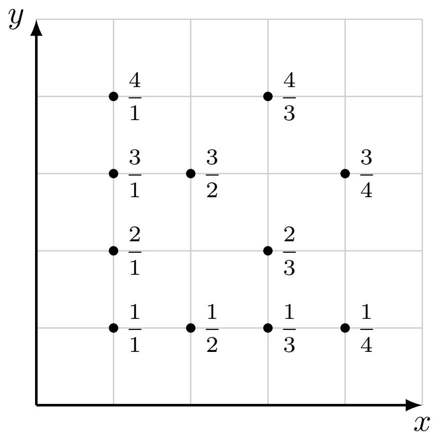


図 2　有理数を格子点に割り当てる．

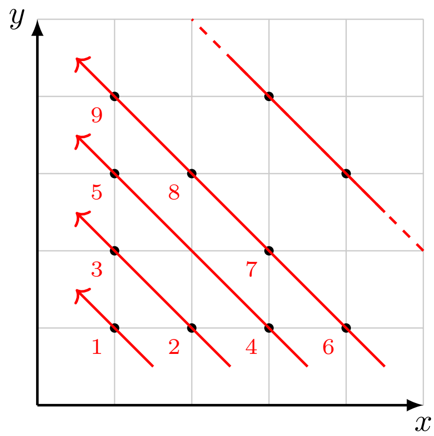


図 3　格子点に自然数を対応させる．

3) 自然数の濃度が実数の濃度よりも小さいことをいうためには，各自然数にそれぞれ 1 つの実数を対応させる対応関係を考えたとき，どの自然数にも対応していない実数が存在することを，任意の対応関係について示せばよいことになります．

自然数と実数の対応関係を 1 つ考え，各自然数 n に対応する実数を $f(n)$ と表すことにします．表 1 に示すように，$f(n)$ の小数部分を取り出します．ただし，対応する小数が有限小数となる場合には，最終桁以降を 0 で補うことで無限桁をもつようにします．また，$0.999\cdots$ のように無限に 9 が続く場合は，0 となる桁ができるだけ多くなる表示を選び，$1.000\cdots$ とします．これによって，各実数の小数表記が一意に定まるようになります．

自然数 n	対応する実数 $f(n)$ の小数部分
1	$0.\,d^1_1\,d^1_2\,d^1_3\,d^1_4\,d^1_5\cdots$
2	$0.\,d^2_1\,d^2_2\,d^2_3\,d^2_4\,d^2_5\cdots$
3	$0.\,d^3_1\,d^3_2\,d^3_3\,d^3_4\,d^3_5\cdots$
4	$0.\,d^4_1\,d^4_2\,d^4_3\,d^4_4\,d^4_5\cdots$
5	$0.\,d^5_1\,d^5_2\,d^5_3\,d^5_4\,d^5_5\cdots$
$\vdots$	$\vdots$

表 1　各自然数に対応する実数の小数部分．

Copyright © 2025 Boda

ここで，実数 r を，次のように定めます．

- r の整数部分は 0 である．
- r の小数第 n 位は，自然数 n に対応する実数の小数第 n 位 d_n^n が，$d_n^n \neq 1$ ならば 1，$d_n^n = 1$ ならば 0 とする．

このようにして定めた r は，明らかにどの自然数にも対応しません．なぜなら，いかなる自然数 n についても，r の小数第 n 位は $f(n)$ の小数第 n 位とは異なるからです．

例えば，表 2 に示すような自然数と実数の対応関係があったとします．

自然数 n	対応する実数 $f(n)$ の小数部分
1	$0.\underline{\mathbf{2}}7955\cdots$
2	$0.9\underline{\mathbf{1}}528\cdots$
3	$0.56\underline{\mathbf{9}}20\cdots$
4	$0.245\underline{\mathbf{0}}2\cdots$
5	$0.1206\underline{\mathbf{1}}\cdots$
$\vdots$	$\vdots$

表 2　各自然数に対応する実数の小数部分の具体例．

この対応関係に対し，先程のルールで実数 r を作ると，まず整数部分は 0 です．次に r の小数第 1 位を定めるために $f(1)$ の小数第 1 位を見ると $2\,(\neq 1)$ なので，r の小数第 1 位は 1 にします．$f(2)$ の小数第 2 位は 1 なので，r の小数第 2 位は 0 にします．同様にして r の小数第 3 位は 1，第 4 位は 1，第 5 位は 0…などとなり，r は，

$$r = 0.10110\cdots$$

と定まります．

以上のように，どのような対応関係を作ったとしても，その対応関係では対応させられない実数 r が必ず存在します．したがって，自然数の濃度は実数の濃度より小さいといえます．この論法を，**カントールの対角線論法** (Cantor’s diagonal argument) といいます．

自然数の濃度を記号 $\overset{\text{アレフ・ゼロ}}{\aleph_0}$，実数の濃度を記号 $\overset{\text{アレフ}}{\aleph}$ で表します．すなわち，

$$\aleph_0 = \mathrm{Card}\,\mathbb{N} = \mathrm{Card}\,\mathbb{Z} = \mathrm{Card}\,\mathbb{Q}$$
$$\aleph = \mathrm{Card}\,\mathbb{R} = \mathrm{Card}\,\mathbb{C}$$

であり，$\aleph_0 < \aleph$ です．濃度 $\aleph_0$ を**可算無限濃度**，$\aleph$ を**連続体濃度**といい，可算無限濃度をもつ集合を**可算無限集合** (countably infinite set)，連続体濃度をもつ集合を**非可算無限集合** (uncountably infinite set) といいます．$\aleph_0$ よりは大きいが $\aleph$ よりも小さい濃度をもつ集合が存在するかどうかは，現代の数学の枠組みでは証明も反証もできないことが知られています．

Copyright © 2025 Boda